

# 1 Notions d'analyse fonctionnelle nécessaires à la programmation dynamique

## 1.1 Espaces métriques

Nous commençons par introduire la notion d'espace métrique:

**Definition 1** *Un espace métrique est constitué d'un ensemble  $S$  et d'une fonction  $d(.,.)$ , appelée une distance, où  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ . La distance  $d$  satisfait les propriétés suivantes:*

- (1)  $\forall (x, y) \in S \times S, d(x, y) \geq 0$ ,
- (2)  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ ,
- (3)  $\forall (x, y) \in S \times S, d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (4)  $\forall (x, y, z) \in S \times S \times S, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

La première propriété requiert que la distance soit une fonction positive. La deuxième requiert qu'elle ne prenne la valeur zéro qu'aux points  $(x, x)$ . Ainsi, les deux premières propriétés combinées impliquent que la distance entre deux points différents est toujours strictement positive. La troisième propriété est une forme de symétrie. La dernière est souvent appelée inégalité triangulaire. La raison pour laquelle ces fonctions sont appelées des distances devrait être claire.

*Exemples d'espaces métriques:*

(a) Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , soit  $l_p[0, +\infty)$  l'ensemble des suites de nombres complexes  $\{x_t\}_{t=0}^{+\infty}$  telles que la somme  $\sum_{t=0}^{+\infty} |x_t|^p$  converge. La fonction  $d_p(x, y) = \left( \sum_{t=0}^{+\infty} |x_t - y_t|^p \right)^{1/p}$  est une distance.  $(l_p[0, +\infty), d_p)$  est donc un espace métrique.

(a') Un cas particulier, souvent utilisé, est  $l_2[0, +\infty)$ ,  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{t=0}^{+\infty} |x_t - y_t|^2}$ .

(b) Un autre cas dérivé est  $S = l_\infty[0, \infty)$ , l'ensemble des suites bornées  $\{x_t\}_{t=0}^{+\infty}$  de nombres complexes ou réels. La distance est  $d_\infty(x, y) = \sup_t |x_t - y_t|$ .

(c) Soit  $S = C[0, T]$  l'ensemble des fonctions continues  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous y associons la distance

$$d_p(f, g) = \left[ \int_0^T |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

(c') Un cas dérivé est l'espace métrique constitué de l'ensemble  $S = C[0, T]$  et de la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - g(t)|.$$

Nous introduisons maintenant la notion de *séquence de Cauchy* et de *limite d'une suite*.

**Definition 2** Une suite  $\{x_n\}$  dans un espace métrique  $(S, d)$  est une suite de Cauchy si:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ , pour tout  $m, n \geq N$ .

**Definition 3** Une suite  $\{x_n\}$  dans un espace métrique  $(S, d)$  converge vers une limite  $x_0 \in S$  si:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ , pour tout  $n \geq N$ .

**Lemma 4** Soit une suite convergente  $\{x_n\}$  dans un espace métrique  $(S, d)$ . Alors  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy.

**Proof.** Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $x_0 \in S$  la limite de la suite  $\{x_n\}$ . Il existe donc  $N$  tel que  $d(x_0, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $i \geq N$ . L'inégalité triangulaire implique que  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m)$ . Ainsi pour tout  $m, n \geq N$ ,  $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . La suite  $\{x_n\}$  est donc aussi une suite de Cauchy. ■

Ainsi, toute suite convergente est une suite de Cauchy. Il se trouve qu'une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente cependant. Nous allons voir cela à travers un exemple.

Prenons d'abord l'espace métrique  $(C[0, 1], d_2)$ . Nous considérons donc l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle  $[0, 1]$  et la distance  $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt}$ . Prenons la séquence de fonctions  $f_n(t) = t^n$ . Cette suite converge simplement<sup>1</sup> vers la fonction

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que  $\{f_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $(C[0, 1], d_2)$ . En effet,

$$d_2(f_m, f_n)^2 = \int_0^1 (t^m - t^n)^2 dt = \left[ \frac{t^{m+1}}{m+1} - 2\frac{t^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{2}{m+n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Comme chacune de ces quantités peut être ramenée aussi petite que l'on veut par un choix approprié de  $m$  et de  $n$ , il est possible de choisir  $N$  tel que  $d_2(f_m, f_n) < \varepsilon$  pour tout  $m, n \geq N$ . La suite  $\{f_n\}$  est donc une suite de Cauchy. Remarquez toutefois que la fonction  $f_0$  vers laquelle la suite converge n'appartient pas à l'espace métrique car elle n'est pas continue au point  $t = 1$ .

(Il peut être aussi démontré qu'une suite peut être une suite de Cauchy avec une certaine distance, mais pas avec une autre distance.)

**Definition 5** Un espace métrique  $(S, d)$  est complet si toute suite de Cauchy définie sur  $(S, d)$  converge dans  $(S, d)$ .

<sup>1</sup>Par «simplement», nous voulons dire point par point (ou «pointwise»). Cela par opposition à la convergence *uniforme*.

*Exemples d'espaces métriques complets:*

(a) Les espaces métriques suivants sont complets

$$\begin{cases} (l_p[0, \infty), d_p), & 1 \leq p < \infty, \\ l_\infty[0, \infty), d_\infty), \\ C[0, T], d_\infty). \end{cases}$$

(b) L'espace métrique  $(C[0, T], d_p)$  n'est *pas* complet ( $1 \leq p < \infty$ ).

(c) L'espace métrique constitué de l'intervalle ouvert  $(0, 1)$  et de la distance  $d(x, y) = |x - y|$  (valeur absolue) n'est pas complet.

## 1.2 Opérateurs

**Definition 6** *Un opérateur est une fonction d'un espace métrique  $(S, d)$  dans lui-même.*

**Definition 7** *Soit  $T : S \rightarrow S$  un opérateur d'un espace métrique  $(S, d)$ . L'opérateur  $T$  est continu en un point  $x_0 \in S$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $d(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$  lorsque  $d(x, x_0) < \eta$ .*

**Definition 8** *Un opérateur  $T$  est continu s'il est continu en tout point de  $S$ .*

Nous sommes particulièrement intéressés par les opérateurs ayant la propriété de prendre n'importe quels deux points et de les rapprocher l'un de l'autre.

**Definition 9** *Soit  $(S, d)$  un espace métrique et  $T : S \rightarrow S$ . L'opérateur  $T$  est une application contractante (ou une contraction) de module  $k$  s'il existe un réel  $k \in [0, 1)$  tel que*

$$d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S \times S.$$

**Lemma 10** *Une contraction est un opérateur continu.*

**Proof.** *Si  $k = 0$ , alors l'opérateur est une fonction constante et est donc clairement continu. Si  $k > 0$ , alors se référant à la définition de la continuité en un point, il suffit de choisir  $\eta = \varepsilon/k$  pour obtenir continuité en tout point. ■*

Nous avons le théorème suivant, dit de l'application contractante.

**Theorem 11** *Soit  $(S, d)$  un espace métrique complet et  $T : S \rightarrow S$  une contraction. Il existe alors un point fixe unique  $x_0 \in S$  tel que  $T(x_0) = x_0$ . De plus, prenant un point quelconque  $x \in S$ , et définissant la suite  $\{x_n\}$  de façon inductive par  $x_1 = T(x_0)$ ,  $x_2 = T(x_1), \dots$ ,  $x_{n+1} = T(x_n)$ , alors la suite  $\{x_n\}$  converge vers le point fixe  $x_0$ .*

**Proof.** Soit  $x$  un point quelconque dans  $S$ . Définissons  $x_1 = T(x)$ ,  $x_2 = T(x_1)$ , ... On peut alors exprimer  $x_n = T^n(x)$ . Nous montrons que  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy. Supposons sans perte de généralité que  $n > m$ . Alors,

$$d(x_m, x_n) = d(T^m(x), T^n(x)) = d(T^m(x), T^m(x_{n-m})) \leq kd(T^{m-1}(x), T^{m-1}(x_{n-m})).$$

Par induction, nous obtenons

$$d(x_m, x_n) \leq k^m d(x, x_{n-m}).$$

Puisque  $d$  est une distance, nous pouvons utiliser l'inégalité triangulaire pour arriver à

$$d(x_m, x_n) \leq k^m [d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-m-1}, x_{n-m})].$$

Puisque  $d(x_m, x_n) \leq k^m d(x, x_{n-m})$  pour tout  $m < n$ , alors  $d(x_i, x_{i+1}) \leq k^i d(x, x_1)$  et donc

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq k^m [d(x, x_1) + kd(x, x_1) + \dots + k^{n-m-1}d(x, x_1)], \\ &\leq k^m [1 + k + \dots + k^{n-m-1}] d(x, x_1), \\ &\leq k^m \frac{1-k^{n-m}}{1-k} d(x, x_1), \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x, x_1). \end{aligned}$$

Puisque  $k < 1$ , le côté droit de l'inégalité peut être ramené sous n'importe quel  $\varepsilon > 0$  donné, en choisissant un  $m$  suffisamment élevé. Par conséquent,  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  quand  $m, n \rightarrow +\infty$ . La suite  $\{x_n\}$  est donc une suite de Cauchy. Comme l'espace métrique est complet, la suite  $\{x_n\}$  converge dans  $S$ .

Soit  $x_0$  la limite de la suite  $\{x_n\} = \{T^n(x)\}$ . Cette limite est le point fixe de  $T$ . Puisque l'opérateur  $T$  est continu,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$ . Comme  $T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = T(x_0)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x_0$ , on en déduit que  $T(x_0) = x_0$ .

Finalement, nous vérifions que ce point fixe est unique. Pour cela, supposons au contraire qu'il existe un autre point fixe  $y_0 \neq x_0$ . Dans ce cas,

$$0 < d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq kd(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

une impossibilité.

(la première inégalité est due au fait que  $d$  est une distance et que  $y_0 \neq x_0$ ; l'égalité reflète que  $x_0$  et  $y_0$  sont supposés être des points fixes; la deuxième inégalité est due au fait que l'opérateur  $T$  est une contraction de module  $k$ ; la dernière inégalité est vraie car le module  $k < 1$ .) ■

Considérons désormais des espaces de fonctions, comme par exemple  $C[0, T]$ .

**Definition 12** Soit  $S$  un espace de fonctions définies sur un domaine donné et deux éléments  $f, g$  de  $S$ . On dit que  $f \geq g$  si et seulement si  $f(t) \geq g(t)$  pour tout  $t$  dans le domaine des fonctions.

Nous utilisons la distance  $d_\infty(f, g) = \sup_t |f(t) - g(t)|$  où le supremum est pris sur le domaine commun des fonctions.

Nous énonçons le théorème suivant:

**Theorem 13** (Théorème de Blackwell) Soit  $T$  un opérateur sur un espace métrique de fonctions  $(S, d_\infty)$ , avec les propriétés suivantes:

(a) (monotonie) Pour tout  $(f, g) \in S \times S$ ,  $f \geq g$  implique que  $T(f) \geq T(g)$ ,

(b) (escompte) Soit  $c$  une fonction réelle constante (égale à  $c$ ). Pour tout réel positif  $c$  et pour tout  $f \in S$ ,  $T(f + c) \leq T(f) + \beta c$  pour un  $\beta \in [0, 1]$ .

Alors, l'opérateur  $T$  est une application contractante de module  $\beta$ .

**Proof.** Nous avons que  $\forall t, f(t) - g(t) \leq |f(t) - g(t)| \leq d_\infty(f, g)$  et donc  $f - g \leq d_\infty(f, g)$  ou  $f \leq g + d_\infty(f, g)$ . Utilisant la propriété de monotonie, nous obtenons que  $T(f) \leq T(g + d_\infty(f, g))$ . Par la propriété d'escompte, on en déduit que  $T(f) \leq T(g) + \beta d_\infty(f, g)$  et donc  $T(f) - T(g) \leq \beta d_\infty(f, g)$ . Par le même raisonnement,  $g \leq f + d_\infty(f, g)$  et procédant similairement, nous arrivons à  $T(g) - T(f) \leq \beta d_\infty(f, g)$ . Il s'en suit que  $\forall t, |T(f)(t) - T(g)(t)| \leq \beta d_\infty(f, g)$  et donc  $d_\infty(T(f), T(g)) \leq \beta d_\infty(f, g)$ . Ainsi, l'opérateur  $T$  est bien une contraction de module  $\beta$ . ■