**ECO 9015** **Automne 2013**

## Examen final

**Question 1:**
Considérez une économie constituée de deux secteurs de production de taille égale. Les travailleurs de type 1 ne peuvent travailler que dans le secteur 1 et les travailleurs de type 2 ne peuvent travailler que dans le secteur 2. Dans chaque secteur, la firme représentative utilise travail $h$ et capital $k$ et produit selon la technologie

$$y_i = z_i f(h,k), \; i = 1,2.$$

Ainsi, la technologie ($f$) est la même dans chaque secteur, mais la productivité stochastique ($z_i$) varie selon le secteur. Remarquez que le vecteur $z_t = (z_{1t}, z_{2t})$ est observé par le ménage représentatif de chaque secteur. Chaque période, les deux ménages représentatifs peuvent louer leur stock de capital comme ils l'entendent à n'importe lequel des secteurs, et ceci sans coût pour transférer le capital à travers secteur.

Dans chaque secteur, le ménage représentatif est caractérisé par des préférences données par $u\left(c_{it}, 1 - h_{it}\right)$. L'offre de travail dans le secteur $i$ est dénotée $h_{it}$. Les ménages escomptent le futur au taux $0 < \beta < 1$ et le capital se déprécie au taux $0 < \delta < 1$.

Les marchés sont tous compétitifs. Nous nous intéressons à l'équilibre de cette économie.
(1.1) Posez et résolvez le problème de la firme représentative de chaque secteur. *Pour cette question, introduisez votre propre notation pour les prix des facteurs.*
(1.2) Quelles sont les variables d'état et de contrôle du problème de chaque ménage représentatif? *Pour cette question, introduisez votre propre notation, comme vous en avez besoin.*
(1.3) Posez et résolvez le problème du ménage représentatif du secteur 1 (en programmation dynamique).

**Question 2:**
Considérez une économie avec une externalité sur le capital *et* une externalité sur le travail, donc une fonction de production utilisée par la firme représentative

$$y_t = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} H_t^{\gamma_1} K_t^{\gamma_2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

où $k$ est le capital et $h$ le travail. Nous gardons la convention que des lettres minuscules représentent des variables individuelles, tandis que des lettres majuscules représentent des variables agrégées. Nous ne disons rien sur le signe de $\gamma_1$ et $\gamma_2$. Remarquez qu'il n'y a pas de productivité stochastique. Les prix des facteurs sont $w_t$ (travail) et $r_t$ (capital). L'économie commence avec un capital individuel $k_0$ et un capital agrégé $K_0$. Les préférences du ménage représentatif sont données par une fonction $u(c_t, 1 - h_t)$. Le futur est escompté au taux $0 < \beta < 1$. La dépréciation du capital est entière chaque période.

Nous commençons par l'équilibre.
(2.1) Posez et résolvez le problème de la firme représentative.
(2.2) En utilisant l'approche Lagrangienne, posez et résolvez le problème du ménage représentatif.
(2.3) Regroupez toutes ces conditions pour arriver à un système caractérisant l'équilibre.
(2.4) Que devient l'allocation d'équilibre à l'état stationnaire?

Nous passons à la solution optimale.
(2.5) Toujours en utilisant l'approche Lagrangienne, posez et résolvez le problème du planificateur social.
(2.6) Que devient l'allocation optimale à l'état stationnaire?
(2.7) Est-il possible que l'allocation à l'équilibre stationnaire coïncide avec l'allocation optimale, avec une certaine combinaison d'externalité positive sur le capital et d'externalité négative sur le travail?

**Question 3:**
Quand l'utilité dépend de la consommation *et* du loisir, et en l'absence de distortion, la condition de premier ordre (CPO) intratemporelle est typiquement

$$w_t u_1(c_t, l_t) = u_2(c_t, l_t),$$

avec

$$w_t = (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha},$$

où $w_t$ représente le salaire, $c_t$ la consommation, $l_t$ le loisir et $h_t = 1 - l_t$ les heures de travail.

(3.1) Réécrivez cette CPO: (a) sous l'hypothèse du travail divisible, i.e. $u(c_t, l_t) = \ln c_t + \psi \ln l_t$, $\psi > 0$, et (b) sous l'hypothèse du travail indivisible, i.e. $u(c_t, l_t) = \ln c_t + A l_t$, $A > 0$. Linéarisez chacune autour de l'état stationnaire (dénoté par un '$*$'). Comme le salaire est exprimé par l'intermédiaire des heures de travail et l'utilité par l'intermédiaire du loisir, il se peut que les déviations en heures ($\widehat{h}_t$) et les déviations en loisir ($\widehat{l}_t$) apparaissent dans une même équation (en plus de $\widehat{z}_t$, $\widehat{k}_t$ et $\widehat{c}_t$, bien sûr).
(3.2) Utilisez le fait que $h_t + l_t = 1$ pour réexprimer ce que vous avez trouvé en (3.1) en faisant disparaître $\widehat{l}_t$, si nécessaire. Utilisez ces deux expressions pour vérifier que l'hypothèse du travail indivisible génère plus de variabilité des heures de travail en réponse à un choc technologique que l'hypothèse du travail divisible.