ECO 9015 - Final

(Solutions)

Problème #1 :

(1.1) Dans le secteur i,

la firme $\max_{k_t^{i,d}\, h_t^{i,d}} z_i f(h_t^{i,d}, k_t^{i,d}) - w_t^i h_t^{i,d} - r_t^i k_t^{i,d}$

Les CPOs sont :

$$\left.\begin{array}{ll} [h_t^{i,d}] & z_i f_1(h_t^{i,d}, k_t^{i,d}) = w_t^i \\ [k_t^{i,d}] & z_i f_2(h_t^{i,d}, k_t^{i,d}) = r_t^i \end{array}\right\}$$

(1.2) Ménage secteur 1 :

Etat : z_{1t}, z_{2t} $\rightarrow$ $z_t = (z_{1t}, z_{2t})$

k_{1t} : capital initial

Contrôle : $k_{1t}^{(1)}$ $\rightarrow$ capital loué au secteur 1

$k_{1t}^{(2)}$ $\rightarrow$ capital loué au secteur 2.

contraint par $k_{1t} = k_{1t}^{(1)} + k_{1t}^{(2)}$

$k_{1,t+1}$ $\rightarrow$ investissement

contraint par le budget des ménages. ($\leftarrow$ (c_{1t}) (pas un choix indépendant) $\rightarrow$ consommation

h_{1t} $\rightarrow$ heures de travail

Ménage secteur 2

Etat : z_t, k_{2t}

Contrôle : $k_{2t}^{(1)}$ $[k_{2t}^{(2)}]$

$k_{2,t+1}$ $[c_{2t}]$

h_{2t}

(1.3) Le ménage du secteur 1:

$$V(k_{1t}, z_t) = \max_{\substack{k_{1t}^{(1)}, k_{1t}^{(2)} \\ k_{1,t+1}, c_{1t} \\ h_{1t}}} u(c_{1t}, 1-h_{1t}) + \beta E_t V(k_{1,t+1}, z_{t+1})$$

r.q. $k_{1t} = k_{1t}^{(1)} + k_{1t}^{(2)}$

$$c_{1t} + k_{1,t+1} - (1-\delta)k_{1t} = w_{1t} h_{1t} + r_{1t} k_{1t}^{(1)} + r_{2t} k_{1t}^{(2)}$$

Autre possibilité:

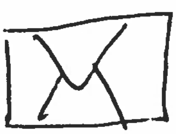
- Justifiez la condition de non-arbitrage et écrire tout de suite $r_{1t} = r_{2t} = r_t$

$$V(k_{1t}, z_t) = \max_{\substack{k_{1t}^{(1)} \\ k_{1,t+1} \\ h_{1,t}}} \quad u\left[\begin{array}{l} w_{1t} h_t + r_{1t} k_{1t}^{(1)} + r_{2t}\left(k_{1t} - k_{1t}^{(1)}\right), \; 1 - h_{1t} \\ - k_{1,t+1} + (1-\delta) k_{1t} \end{array}\right]$$

$$+ \; \beta E_t V(k_{1,t+1}, z_{t+1})$$

$[k_{1,t+1}]$:

$$u_1(c_{1t}, 1-h_{1t}) + \beta E_t V_1(k_{1,t+1}, z_{t+1}) = 0$$



$$V_1(k_{1t}, z_t) = (r_{2t} + 1 - \delta)\, u_1(\tilde{c}_{1t}, 1 - h_{1t})$$

D'où :

$$u_1(c_{1t}, 1-h_{1t}) = \beta E_t\left[u_1(c_{1,t+1}, 1-h_{1t})(r_{2,t+1} + 1 - \delta)\right]$$

ou

$$E_t\left[\beta \frac{u_1(c_{1,t+1}, 1-h_{1,t+1})}{u_1(c_{1t}, 1-h_{1t})} (r_{2,t+1} + 1 - \delta)\right] = 1$$

$[h_{1t}]$ $$\boxed{w_{1t}\, u_1(c_{1t}, 1-h_{1t}) = u_2(c_{1t}, 1-h_{1t})}$$

$[k_{1t}^{(1)}]$ $$(r_{1t} - r_{2t})\, u_1(c_{1t}, 1-h_{1t}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{1t} = r_{2t}}$$

que nous dénoterons r_t.

Finalement:

$$\boxed{\begin{gathered} E_t\left[\beta \frac{u_1(c_{1,t+1}, 1-h_{1,t+1})}{u_1(c_{1t}, 1-h_{1t})}(r_{t+1} + 1 - \delta)\right] = 1 \\ w_{1t}\, u_1(c_{1t}, 1-h_{1t}) = u_2(c_{1t}, 1-h_{1t}) \end{gathered}}$$

Problème 2

(2.1) La firme $\max_{k_t^d, h_t^d} (h_t^d)^{\alpha} (k_t^d)^{1-\alpha} H_t^{\gamma_1} K_t^{\gamma_2} - w_t h_t^d - r_t k_t^d$

$$[h_t^d] \qquad w_t = \alpha\, h_{t,d}^{\alpha-1} k_{t,d}^{1-\alpha} H_t^{\gamma_1} K_t^{\gamma_2} = \alpha \frac{y_t}{h_t}$$

$$[k_t^d] \qquad r_t = (1-\alpha)\, h_{t,d}^{\alpha} k_{t,d}^{-\alpha} H_t^{\gamma_1} K_t^{\gamma_2} = (1-\alpha) \frac{y_t}{k_t}$$

(2.2) $$\max_{\{k_{t+1}, h_t, c_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t)$$

t.q. $c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = w_t h_t + r_t k_t, \ \forall t$

(k_0, K_0 donnés)

Autrement dit,

$$\max_{\{k_{t+1}, h_t, c_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left[u(c_t, 1-h_t) + \lambda_t (w_t h_t + r_t k_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t) \right]$$

$[l_T]$?

$$U = \cdots + \beta^T \left[u(c_T, 1-l_T) + \lambda_T \begin{pmatrix} w_T l_T + r_t k_T - c_T \\ - k_{T+1} + (1-\delta) k_T \end{pmatrix} \right] + \cdots$$

$[l_T]$ $\quad -u_2(c_T, 1-l_T) + \lambda_T w_T = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_T w_T = u_2(c_T, 1-l_T), \quad \forall T}$$

$[k_{T+1}]$?

$$U = \cdots + \beta^T [u(c_T, 1-l_T) + \lambda_T (w_T l_T + r_T k_T - c_T - k_{T+1} + (1-\delta) k_T)]$$
$$+ \beta^{T+1} \left[u(c_{T+1}, 1-l_{T+1}) + \lambda_{T+1} \begin{pmatrix} w_{T+1} l_{T+1} + r_{T+1} k_{T+1} - c_{T+1} \\ - k_{T+2} + (1-\delta) k_{T+1} \end{pmatrix} \right]$$
$$+ \cdots$$

$[k_{T+1}]$ $\quad -\beta^T \lambda_T + \beta^{T+1} \lambda_{T+1} (r_{T+1} + 1 - \delta) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_T = \beta \lambda_{T+1} (r_{T+1} + 1 - \delta), \quad \forall T}$$

$[c_T]$?

$$U = \dots + \beta^T \left[u(c_T, 1-h_T) + \lambda_T \left(w_T h_T + r_T k_T - c_T - k_{T+1} + (1-\delta) k_T \right) \right] + \dots$$

$[c_T]$ $\quad u_1(c_T, 1-h_T) - \lambda_T = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_T = u_1(c_T, 1-h_T)}$$

(2.3) On a :

$$\begin{cases} u_1(c_t, 1-h_t)\, w_t = u_2(c_t, 1-h_t), & \forall t \\ u_1(c_t, 1-h_t) = \beta u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1})(r_{t+1} + 1 - \delta), & \forall t \end{cases}$$

Après avoir pris les CPO, $k = K$.

$$\begin{cases} r_t = (1-\alpha)\, h_t^{\alpha+\gamma_1}\, k_t^{-\alpha+\gamma_2} \\ w_t = \alpha\, h_t^{\alpha+\gamma_1-1}\, k_t^{1-\alpha+\gamma_2} \end{cases}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = y_t = h_t^{\alpha+\gamma_1} k_t^{1-\alpha+\gamma_2}$$

TVC $\quad \lim_{t \to \infty} \beta^t k_{t+1} u_1(c_t, 1-h_t) = 0$

(2.4) A l'état stationnaire :

$$
\begin{cases}
1 = \beta\left[(1-\alpha)\, h^{\alpha+\gamma_1} k^{-\alpha+\gamma_2} + 1 - \delta\right] \\
u_1(c, 1-h)\, \alpha\, h^{\alpha+\gamma_1 - 1} k^{1-\alpha+\gamma_2} = u_2(c, 1-h) \\
c + \delta k = y = h^{\alpha+\gamma_1} k^{1-\alpha+\gamma_2}
\end{cases}
$$

(2.5) le problème optimal est de :

$$
\max_{\left\{ k_{t+1}, c_t, h_t \right\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t)
$$

$$
\text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = y_t \, , \quad \forall t
$$

$(k_0, K_0$ donnés$)$

Autrement dit,

$$
\max_{\left\{ k_{t+1}, c_t, h_t \right\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left[u(c_t, 1-h_t) + \lambda_t \left(h_t^{\alpha+\gamma_1} k_t^{1-\alpha+\gamma_2} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t \right) \right]
$$

$k = K$, <u>avant</u> les CPO.

$[h_T]$?

$$U = \dots + \beta^T \left[u(c_T, 1-h_T) + \lambda_T \left(h_T^{\alpha+\gamma_1} k_T^{1-\alpha+\gamma_2} - c_T - k_{T+1} + (1-\delta)k_T \right) \right] + \cdots$$

$[h_T]$
$$-u_2(c_T, 1-h_T) + \lambda_T (\alpha+\gamma_1) h_T^{\alpha+\gamma_1-1} k_T^{1-\alpha+\gamma_2} = 0$$

$$\boxed{u_2(c_T, 1-h_T) = \lambda_T (\alpha+\gamma_1) h_T^{\alpha+\gamma_1-1} k_T^{1-\alpha+\gamma_2}, \quad \forall T}$$

$[k_{T+1}]$?

$$U = \dots + \beta^T \left[u(c_T, 1-h_T) + \lambda_T \left(h_T^{\alpha+\gamma_1} k_T^{1-\alpha+\gamma_2} - c_T - k_{T+1} + (1-\delta)k_T \right) \right]$$
$$+ \beta^{T+1} \left[u(c_{T+1}, 1-h_{T+1}) + \lambda_{T+1} \left(h_{T+1}^{\alpha+\gamma_1} k_{T+1}^{1-\alpha+\gamma_2} - c_{T+1} - k_{T+2} + (1-\delta)k_{T+1} \right) \right]$$
$$+ \cdots$$

$[k_{T+1}]$:
$$-\beta^T \lambda_T + \beta^{T+1} \lambda_{T+1} \left[(1-\alpha+\gamma_2) h_{T+1}^{\alpha+\gamma_1} k_{T+1}^{-\alpha+\gamma_2} + 1 - \delta \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_T = \beta \lambda_{T+1} \left[(1-\alpha+\gamma_2) h_{T+1}^{\alpha+\gamma_1} k_{T+1}^{-\alpha+\gamma_2} + 1 - \delta \right], \quad \forall T}$$

λT /

$[c_T]$?

$$U = \dots + \beta^T \left[u(c_T, 1-h_T) + \lambda_T \left(h_T^{\alpha+\gamma_1} k_T^{1-\alpha+\gamma_2} - c_T - k_{T+1} + (1-\delta) k_T \right) \right]$$
$$+ \dots$$

$[c_T]$ $\quad u_1(c_T, 1-h_T) - \lambda_T = 0$

$$\boxed{\lambda_T = u_1(c_T, 1-h_T), \ \forall T}$$

Système:

$$\begin{cases} u_2(c_t, 1-h_t) = u_1(c_t, 1-h_t) \underbrace{(\alpha+\gamma_1) h_t^{\alpha+\gamma_1-1} k_t^{1-\alpha+\gamma_2}}_{PM_h} \\ u_1(c_t, 1-h_t) = \beta u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1}) \left[\underbrace{(1-\alpha+\gamma_2) h_{t+1}^{\alpha+\gamma_1} k_{t+1}^{-\alpha+\gamma_2}}_{PM_k} + 1-\delta \right] \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = y_t = h_t^{\alpha+\gamma_1} k_t^{1-\alpha+\gamma_2} \\ \text{TVC} \quad \lim_{t \to +\infty} \beta^t k_{t+1} u_1(c_t, 1-h_t) = 0 \end{cases}$$

(2.6)

$$u_2(c, 1-h) = u_1(c, 1-h)\,(\alpha+\gamma_1)\, h^{\alpha+\gamma_1-1}\, k^{1-\alpha+\gamma_2}$$

$$1 = \beta\left[(1-\alpha+\gamma_2)\, h^{\alpha+\gamma_1}\, k^{-\alpha+\gamma_2} + 1-\delta\right]$$

$$c + \delta k = h^{\alpha+\gamma_1}\, k^{1-\alpha+\gamma_2}$$

(2.7) Comparant les 2 systèmes d'équations évaluées à l'état stationnaire:

Pour avoir "équilibre = optimal", il faudrait que

$$\begin{cases} \alpha = \alpha+\gamma_1 \\ 1-\alpha = 1-\alpha+\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow (\gamma_1, \gamma_2) = (0, 0).$$

La réponse est donc "NON".

$//$

Problème #3

(3.1) Travail divisible

$$\begin{cases} u_1(c_t, l_t) = 1/c_t \\ u_2(c_t, l_t) = \psi/l_t \end{cases}$$

Donc, CPO $\Longrightarrow \dfrac{(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha}}{c_t} = \dfrac{\psi}{l_t}$.

Travail indivisible :

$$\begin{cases} u_1(c_t, l_t) = 1/c_t \\ u_2(c_t, l_t) = A \end{cases}$$

Donc, CPO $\Longrightarrow \dfrac{(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha}}{c_t} = A$.

Travail divisible

L'état stationnaire est tel que :

$$\frac{(1-\alpha)\, z^* (k^*)^{\alpha} (h^*)^{-\alpha}}{c^*} = \frac{\Psi}{\ell^*} . \qquad (*)$$

- Reprenant la CPO, et dénotant $\hat{x}_t = \ln \frac{x_t}{x^*}$, pour toutes les variables :

$$\frac{(1-\alpha)\, z^* e^{\hat{z}_t} \left[k^* e^{\hat{k}_t}\right]^{\alpha} \left[h^* e^{\hat{h}_t}\right]^{-\alpha}}{c^* e^{\hat{c}_t}} = \frac{\Psi}{\ell^* e^{\hat{\ell}_t}} .$$

Simplifiant en utilisant $(*)$ ci-dessus, on obtient :

$$e^{\hat{z}_t + \alpha \hat{k}_t - \alpha \hat{h}_t - \hat{c}_t} = e^{-\hat{\ell}_t} , \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{z}_t + \alpha(\hat{k}_t - \hat{h}_t) - \hat{c}_t + \hat{\ell}_t = 0 , \quad \forall t.}$$

Travail indivisible :

. L'état stationnaire est tel que :

$$\frac{(1-\alpha) z^* (k^*)^\alpha (h^*)^{-\alpha}}{c^*} = A .$$

. La CPO nous donne :

$$\frac{(1-\alpha) z^* e^{\hat{z}_t} (k^* e^{\hat{k}_t})^\alpha (h^* e^{\hat{h}_t})^{-\alpha}}{c^* e^{\hat{c}_t}} = A ,$$

ce qui donne après simplification :

$$e^{\hat{z}_t + \alpha \hat{k}_t - \alpha \hat{h}_t - \hat{c}_t} = 1 , \forall t$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{z}_t + \alpha (\hat{k}_t - \hat{h}_t) - \hat{c}_t = 0, \ \forall t.}$$

(3.2) Essayons de linéariser la contrainte $h_t + l_t = 1$.

(A l'état stationnaire, $h^* + l^* = 1$.)

La contrainte peut s'écrire : $h^* e^{\hat{h}_t} + l^* e^{\hat{l}_t} = 1$

$$\Rightarrow h^* (1 + \hat{h}_t) + l^* (1 + \hat{l}_t) \simeq 1$$

$$\Rightarrow h^* \hat{h}_t + l^* \hat{l}_t \simeq 0$$

$$\Rightarrow \hat{l}_t = \frac{-h^* \hat{h}_t}{l^*} = \frac{h^*}{h^* - 1} \hat{h}_t .$$

Divisible $\longrightarrow$ $\hat{z}_t + \alpha(\hat{k}_t - \hat{h}_t) - \hat{c}_t + \dfrac{h^*}{h^* - 1} \hat{h}_t = 0$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_t + \alpha \hat{k}_t - \hat{c}_t - \left(\alpha + \dfrac{h^*}{1 - h^*} \right) \hat{h}_t = 0 \\ \qquad \text{(Divisible)} \\ \qquad \text{VS.} \\ z_t + \alpha \hat{k}_t - \hat{c}_t - \alpha \hat{h}_t = 0 \\ \qquad \text{(Indivisible)} \end{array} \right.$$

* <u>Argument d'équilibre partiel</u>:

Comme le coefficient sur $\hat{h}_t$ est plus élevé (en valeur absolue) pour le travail divisible, les heures réagissent (en %) moins à un choc de productivité ($\hat{z}_t > 0$) dans ce cas.

<u>Intuition</u>:

Divisible → utilité marginale du loisir

$$u_\ell = \frac{\psi}{l_t} = \frac{\psi}{(1-h_t)}$$

→ diminue avec l_t

(Plus on augmente h_t, plus u_ℓ augmente.)

→ "freine" l'augmentation de h_t, en réaction à z_t

Indivisible → utilité marginale du loisir est constante, $\forall h_t$.