Question I Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

1) a) Firme choisit h_t^d, k_t^d

pour $\max_{h_t^d, k_t^d} e^{z_t} f(h_t, k_t) - w_t h_t - r_t k_t$

CPOs:
$$\begin{cases} e^{z_t} f_1(h_t^d, k_t^d) = w_t & [h_t^d] \\ e^{z_t} f_2(h_t^d, k_t^d) = r_t & [k_t^d] \end{cases}$$

1) b) Etats: k_t, d_t, z_t.

Contrôles: k_{t+1}, d_{t+1}, h_t. (c_t)

1) c) $V(k_t, d_t, z_t) = \max_{k_{t+1}, d_{t+1}, h_t} \left\{ u(c_t, d_t, 1-h_t) + \beta E_t V(k_{t+1}, d_{t+1}, z_{t+1}) \right\}$

ici, $k_t = k_t^o$
$h_t = h_t^o$

t.q. $w_t h_t + r_t k_t$
$= c_t + k_{t+1} + d_{t+1} - (1-\delta)(k_t + d_t) + T_t$

1) d) CPO $[k_{t+1}]$: $-u_1(c_t, d_t, 1-h_t) + \beta E_t V_1(k_{t+1}, d_{t+1}, z_{t+1}) = 0$

CPO $[d_{t+1}]$ $-u_1(c_t, d_t, 1-h_t) + \beta E_t V_2(k_{t+1}, d_{t+1}, z_{t+1}) = 0$

CPO $[h_t]$ $w_t u_1(c_t, d_t, 1-h_t) - u_3(c_t, d_t, 1-h_t) = 0$

Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

$\boxed{\times}_{k_t}$: $V_1(k_t, d_t, z_t) = (r_t + 1 - \delta)\, u_1(c_t, d_t, 1-h_t)$

$\boxed{\times}_{d_t}$: $V_2(k_t, d_t, z_t) = (1-\delta)\, u_1(c_t, d_t, 1-h_t) + u_2(c_t, d_t, 1-h_t)$

Donc, après updating :

$$\begin{cases} u_1(c_t, d_t, 1-h_t) = \beta E_t\left[(r_{t+1} + 1 - \delta)\, u_1(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1})\right] & (CPO_1) \\ u_1(c_t, d_t, 1-h_t) = \beta E_t\left[(1-\delta)\, u_1(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1}) + u_2(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1})\right] & (CPO_2) \\ w_t\, u_1(c_t, d_t, 1-h_t) = u_3(c_t, d_t, 1-h_t) & (CPO_3) \end{cases}$$

1e) CPO₁ : Indifférence entre c_t / k_{t+1}

$$\underbrace{u_1(c_t, d_t, 1-h_t)}_{\text{GM consommation (non-durables)}} = \underbrace{\beta E_t\left[(r_{t+1} + 1 - \delta)\, u_1(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1})\right]}_{\text{GM investissement}}$$

GM consommation (non-durables)

GM investissement
- escompté,
- avec rendement et dépréciation,
- valeur espérée.

Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

CPO$_2$ Indifférence c_t / d_{t+1}

$$\underbrace{u_1(c_t, d_t, 1-h_t)}_{\text{GM consommation (non-durables)}} = \beta E_t \underbrace{\left[(1-\delta) u_1(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1}) + u_2(c_{t+1}, d_{t+1}, 1-h_{t+1}) \right]}_{\text{GM "investissement" en durables}}$$

GM consommation (non-durables)

GM "investissement" en durables

- escompté
- valeur espérée
- gain futur

→ $(1-\delta)$ unités supplémentaires la période suivante

+

→ utilité marginale consommation (biens durables)

//

CPO$_3$: Indifférence travail/loisir

$$\underbrace{w_t\, u_1(c_t, d_t, 1-h_t)}_{\text{GM consommation}} = \underbrace{u_3(c_t, d_t, 1-h_t)}_{\text{GM loisir}}$$

GM consommation

GM loisir

venant de travailler une unité de temps supp.

• Si une de ces égalités n'est pas satisfaite, les allocations ne sont pas optimales.

Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

1f) Equilibre budgétaire gouvernemental :

Pour tout t, $\underbrace{g}_{\text{dépenses}} = \underbrace{T_t}_{\text{ressources}}$.

1g) Nous avons les 5 CPOs et les contraintes :

$$\begin{cases} u_1(c,d,1-h) = \beta E_t\left[(r'+1-\delta)\,u_1(c',d',1-h')\right] \\ u_1(c,d,1-h) = \beta E_t\left[(1-\delta)\,u_1(c',d',1-h') + u_2(c',d',1-h')\right] \\ w\,u_1(c,d,1-h) = u_3(c,d,1-h) \end{cases}$$

Equilibrage des marchés : $\begin{cases} h^d = h^o = h \\ k^d = k^o = k \end{cases}$

$$\begin{cases} r = e^z f_1(h,k) \\ w = e^z f_2(h,k) \\ \text{Th. Euler} \Rightarrow wh + rk = e^z f(h,k) = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = wh + rk = c + d' + k' - (1-\delta)(d+k) + T \\ T = g \end{cases}$$

$$y = e^z f(h,k) = c + d' + k' - (1-\delta)k + g$$

Donc, le système d'allocations est :

$$\begin{cases} u_1(c,d,1-h) = \beta E_t\left[\left(e^{z'} f_2(h',k') + 1-\delta\right) u_1(c',d',1-h')\right] \\ u_1(c,d,1-h) = \beta E_t\left[(1-\delta) u_1(c',d',1-h') + u_2(c',d',1-h')\right] \\ e^{z} f_1(h,k)\, u_1(c,d,1-h) = u_3(c,d,1-h) \\ y = e^{z} f(h,k) = c + d' + k' - (1-\delta)(d+k) + g \end{cases}$$

1) h)

$$\max_{\{k_{t+1}, d_{t+1}, h_t, c_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, d_t, 1-h_t)$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} e^{z_t} f(h_t,k_t) = c_t + k_{t+1} + d_{t+1} - (1-\delta)(d_t+k_t) + g \\ z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1} \end{cases}$$

et (k_0, z_0, d_0) donnés.

- On cherche des séquences d'allocations
- La contrainte est celle des ressources agrégées.

Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

Question II:

(2a) Sans coût de licenciement, il n'y a pas de lien entre la décision d'embauche à différentes périodes.

Votre décision maintenant n'affecte pas votre décision future.

(2b) Le pb de la firme "s" est:

$$\max_{n^d} \; p s \sqrt{n^d} - w n^d$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow n^d(s) = \frac{s^2}{4(w/p)^2}$$

(2c) $\pi(s) = p s \sqrt{n^d(s)} - w n^d(s)$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \pi(s) = p \frac{s^2}{4(w/p)}$$

(2d) La valeur d'entrée $V_e = E_s(\pi(s)) - p c_e$

D'où : $$V_e = \int \pi(s)\, d\nu(s) - p c_e$$

ou

$$V_e = \sum_{i=1}^{N} \pi(s_i) \underbrace{\nu(s_i)}_{\text{Prob}(s = s_i)} - p c_e$$

La condition de libre entrée spécifie que les firmes rentrent dans l'industrie jusqu'à ce que la valeur d'entrée tombe à zéro.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \nu(s_i)\, \pi(s_i) = p c_e \quad \text{[Libre Entrée]}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \nu(s_i)\, p \frac{s_i^2}{4(w/p)} = p c_e$$

$$\Rightarrow 4(w/p) c_e = \sum_{i=1}^{N} \nu(s_i) s_i^2$$

2 e) Comme le côté droit de l'équation est fixe, cela implique une relation négative entre salaire réel (w/p) et coûts d'entrée c_e.

→ Pour "compenser" les firmes d'un coût

d'entrée élevé, il faut un salaire réel plus bas, à productivité future ({Sc}) donnée.

(*)

2f) La durée de l'horizon ne change pas cette intuition :

→ Même si la firme s'attend à rester un certain nombre de périodes dans l'industrie, et même si sa productivité future peut varier,

"à productivité future moyenne espérée, des coûts d'entrée plus élevés doivent être compensés par un salaire réel plus bas..."

Les coûts de licenciement ne changent rien non plus. Ils ne font que réduire les profits futurs.
Mais si $c_e \uparrow$, il faut que $w/p \downarrow$ pour compenser.

(*) La libre entrée égalise coûts d'entrée maintenant et profits (espérés) futurs.

$$c_e = E(\text{profits})$$

Si $c_e \uparrow \Rightarrow E(\text{profits}) \uparrow \Rightarrow w/p \downarrow$.

Question III

3 a) Description de l'économie qui permet de résoudre le problème (optimal ou équilibre):

- Description des participants (ménages, firmes, gouvernement ...).
- ~~Ca~~ Caractérisation des participants:
  - technologie,
  - préférences.
- Contraintes.
- Variables à choisir pour les participants.

3 b) Equilibre: - par l'intermédiaire des marchés et donc des prix
- contrainte budgétaire des ménages
- Pb des ménages + Pb des firmes
- équilibrage des marchés.

Optimal - choix d'un PS qui ne passe pas par les marchés (→ pas de prix), mais qui choisit les allocations seulement.

- Même objectif (utilité) pour les deux problèmes, mais contrainte différente → contrainte de ressource agrégée.

- Seulement pb des ménages

- En cas d'externalité, celle-ci est internalisée par le PS.

3c) Notation la plus générale:

$$T h(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} u(x,a) + \beta h(g(x,a)), \quad \forall x \in X$$

[x : état du système
a : actions
g : loi de transition.

Problème de Ramsey:

$$Tv(k_t) = \max_{k_{t+1}} u(c_t) + \beta v(k_{t+1})$$

t.q. $k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_t = f(k_t)$

3d) Th de l'application contractante :

Si (S,d) est un espace métrique complet et $g : S \to S$ une application contractante de module β, alors :

(*) • g a exactement un point fixe $\hat{x}$ dans S,
(Δ) • pour tout $x_0 \in S$,
$$d\left(g^n(x_0), \hat{x}\right) \leq \beta^n d(x_0, \hat{x}), \forall n$$

Cela nous permet de dire (en vérifiant les conditions suffisantes de Blackwell) :

- l'opérateur T ci-dessus est une application contractante,
- que la fonction de valeur est l'unique point fixe de cet opérateur. (*)
- cela nous donne une façon d'approximer ce point fixe
  → en itérant sur l'opérateur.

3a) Voir section 5.

Montrer convergence globale revient à montrer que

$$k_{t+1} > k_t \iff k_t < k^*$$

v concave $\implies$ $[v'(k_t) - v'(k_{t+1})][k_t - k_{t+1}] < 0.$

$$k_{t+1} > k_t \iff v'(k_t) > v'(k_{t+1})$$

$$\iff \underbrace{[f'(k_t)+1-\delta]\,u'(c_t)}_{k_t} > \underbrace{\frac{1}{\beta}\,u'(c_t)}_{\text{CPO}[k_{t+1}]}$$

$$\iff f'(k_t)+1-\delta > \underbrace{f'(k^*)+1-\delta}_{\text{Déf. de } k^*}$$

$$\iff f'(k_t) > f'(k^*)$$

$$\iff k_t < k^* \quad (f \text{ concave})$$

3) f) (1) Ce théorème nous garantit qu'en itérant sur l'opérateur de Bellman, à partir de n'importe quelle conjecture pour V_0, on est sur de converger vers la fonction

(2) L'algorithme se base sur cette idée.

- Discrétiser variables du problème.
- Partir d'une conjecture / vecteur V^0 pour la fonction de valeur
  → (typiquement) $V^0 = 0$.
- A partir de V_j^0 utiliser l'équation de Bellman pour trouver les règles de décision,
  ex: Pour chaque k_i, trouver k' qui maximise la fonction Tv
  → cela génère nouvelle conjecture V^1
- Comparer V^1 et V^0 (élément par élément)
- Tant que V_{ancien} et $V_{nouveau}$ ne sont pas suffisament proches, recommencer à partir de la toute dernière conjecture.

3) g) En principe, IFV peut toujours être utilisée.
(application directe du th. de l'application contractante.)

En pratique, quand il y a plusieurs variables d'état et/ou de contrôle, cela devient de plus en plus exigeant pour l'ordinateur, et cela prend de plus en plus de temps pour converger.

Réduire la taille de la grille aide bien sûr, mais cela produit une moins bonne approximation, bien sûr.

3) h) Voir section 8.5.

Si le problème est

$$v(k) = \max_{k', h} u[f(h,k) + (1-\delta)k - k', 1-h] + \beta v(k')$$

En principe, ~~si~~ (k, k') sont connus, les heures sont implicitement déterminées par la condition intra-temporelle, $f_1 \cdot u_1(c, 1-h) = u_2(c, 1-h)$

En pratique, on passe par l'étape suivante :

$$\sigma(k, k') = \max_{h} u[f(h,k) - (1-\delta)k - k', 1-h]$$

Soient

$$h = \phi(k, k')$$

Alors, $v(k) = \max_{k'} r(k,k') + \beta v(k')$.

On peut utiliser IFV pour ce problème numérique.

3) i) Il faut stationnariser car la programmation dynamique suppose que l'environnement est stationnaire.

Ainsi, les règles de décision ne dépendent que des variables d'état et pas de la période considérée.

3) j) Voir section 10.3.

- $\left.\begin{array}{l}\{y_t, l_t, h_t\} \\ (\alpha, g)\end{array}\right]$ connus $\rightarrow$ on peut calculer les résidus $\{\ln A_t\}$.

- $\left.\begin{array}{l}\ln A_t - \ln A = z_t \\ z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t\end{array}\right| \longrightarrow \ln A_t = (1-\rho)\ln A + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \quad (*)$

- Regressant $(*)$, on obtient une estimée pour ρ et les résidus $\hat{\varepsilon}_t$. Alors $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T}\sum_t \hat{\varepsilon}_t^2$.