

Université du Québec à Montréal, Département des sciences économiques  
Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I  
Trimestre: Hiver 2008  
Professeur: Alain Delacroix

## EXAMEN INTRA

### TRÈS IMPORTANT:

- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chacune des questions de cet examen, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

### À LIRE ATTENTIVEMENT:

- \*\* Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants à leur sortie de la salle d'examen.
- \*\* Aucune documentation permise. Écrire lisiblement.
- \*\* Répondre aux questions dans l'ordre.
- \*\* Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- \*\* Indiquer clairement les numéros de chacune des questions.

### *QUESTION 1: (20 points)*

- 1.1 Qu'est-ce qu'une matrice idempotente? Donnez la **définition**. *(5 points)*
- 1.2 Comment peut-on vérifier rapidement qu'une matrice est idempotente? *(5 points)*
- 1.3 Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où  $x$  et  $y$  sont des scalaires quelconques. Sous quelle(s) condition(s) sur  $x$  et  $y$  la matrice  $A$  est-elle idempotente? Combien il y a-t-il de telles matrices idempotentes? Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La réponse ne peut pas reposer sur un exemple. *(5 points)*

1.4 Sous quelle(s) condition(s) sur  $x$  et  $y$  la matrice  $B$  est-elle idempotente? Combien il y a-t-il de telles matrices idempotentes? Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La réponse ne peut pas reposer sur un exemple. *(5 points)*

QUESTION 2: (10 points)

Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 11 - 9x_3, \\ 8x_1 + 5(x_2 + x_3) = 5 + 4x_2 + 9x_3, \\ 7x_2 - 5 = 5x_3 - 3x_1. \end{cases}$$

2.1 Écrivez le système ci-dessus sous forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (5 points)

2.2 Trouvez la valeur-solution pour  $x_2$  et  $x_3$  exclusivement en utilisant la méthode de Cramer. Expliquez comment vous procédez. (5 points)

QUESTION 3: (10 points)

Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} x + 5z = 1, \\ 3x + y = 3, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Écrivez ce système d'équations linéaires sous forme matricielle (5 points), et résolvez ce système utilisant la méthode qui se fonde sur l'inverse de la matrice des coefficients (5 points). Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

QUESTION 4: (20 points)

4.1 Rappelez la **définition** d'indépendance linéaire pour un système de vecteurs. Rappel: on ne vous demande pas de *caractériser* un système indépendant, mais plutôt d'en donner la *définition*. (10 points)

4.2 Soit la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 2 & 3 \\ 2 & \sigma & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quel est le rang de cette matrice? Est-ce que le rang dépend de la valeur du paramètre  $\sigma$ ? Expliquez. (5 points)

4.3 Soit la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix}.$$

Quel est le rang de cette matrice  $T$ ? Dépend-il du paramètre  $\beta$ ? Quelles valeurs le rang peut-il prendre? Expliquez. (5 points)

QUESTION 5: (10 points)

5.1 Écrire le modèle de comptabilité nationale suivant la forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (5 points):

$$\begin{cases} Y = C + I + G, \\ I = \alpha + \beta Y, \\ C = \gamma + \delta Y, \end{cases}$$

où  $Y$  représente le revenu national,  $C$  représente la consommation nationale,  $I$  représente l'investissement,  $G$  représente les dépenses gouvernementales et où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  sont des paramètres.

5.2 Ne résolvez pas, mais précisez quand il existe une solution unique à ce système. Expliquez. (5 points)

QUESTION 6: (15 points)

Soit le système à résoudre

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -5, \\ 3x + y + 5z = 5, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

6.1 Quel est le déterminant de la matrice associée? (5 points)

6.2 Que peut-on en conclure sur le nombre de solutions à ce système? Expliquez. (5 points)

6.3 Comment peut-on déterminer le nombre exact de solutions? Expliquez. (5 points)

QUESTION 7 (15 points):

7.1 Rappelez la définition (i) d'une forme quadratique définie négative et (ii) d'une forme quadratique semi-définie positive. (5 points)

7.2 Caractérisez la forme quadratique  $y = -p^2 + 6pq - 9q^2$ . Autrement dit est-elle: (i) définie positive, (ii) définie négative, (iii) semi-définie positive, (iv) semi-définie négative, ou (v) indéfinie? Expliquez. (10 points)