

Université du Québec à Montréal, Département des sciences économiques
Cours: ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Automne 2009
Professeur: Alain Delacroix

EXAMEN INTRA

TRÈS IMPORTANT:

- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chaque question, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

À LIRE ATTENTIVEMENT:

- ** Matériel permis sur les bureaux: stylos et crayons, règle, **pas de calculatrice**. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis à l'étudiant à sa sortie de la salle d'examen.
- ** Aucune documentation n'est permise.
- ** Écrivez lisiblement.
- ** Utilisez une nouvelle page pour chaque question et en indiquez clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)

Soit un nombre entier $n \geq 1$. Étudiez la fonction

$$f(x) = x^n - \ln x.$$

[Cela implique (i) préciser le domaine de définition, (ii) calculer les dérivées premières et secondes, (iii) produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonie et de concavité de la fonction f , et (iv) tracer la fonction f à partir de ce tableau.]

Soyez clair. Pour tracer la courbe [partie (iv)], vous pouvez choisir une valeur particulière pour n . Les parties (i)-(iii) doivent être basées sur le cas général.

QUESTION 2: (15 points)

Conservez la fonction f de la question précédente. Nous cherchons à exprimer le minimum de la fonction sur son domaine de définition. Exprimez la condition de premier ordre. Appelez x_n^{\min} la valeur de x identifiée par cette condition. Utilisez la condition de second ordre pour vous assurer que nous avons bien un minimum. Est-ce un minimum local ou global? Pourquoi? Quelle est la valeur de ce minimum, i.e. la valeur que la fonction f prend à x_n^{\min} ? Simplifiez l'expression autant que possible.

QUESTION 3: (15 points)

Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = a - bq,$$

où $a, b > 0$ et p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = c.q, \quad c > 0.$$

- Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
- Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Devons-nous imposer une condition sur (a, c) pour que le résultat ait du sens économique? Expliquez.

QUESTION 4: (15 points)

Pour chacune des fonctions, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.

- $f(x) = (6x^3 - 4).e^x$;
- $f(x) = e^{x^2}$;
- $f(x) = \frac{e^x}{x+7}$;
- $f(x) = \frac{20}{x^9}$.

QUESTION 5: (15 points)

Soit la fonction $h(x) = m.x^n - p.\ln x^q$ où (m, n, p, q) sont des paramètres strictement positifs et $x > 0$.

- Exprimez la condition de premier ordre. Calculez le point x_0 identifié en fonction de (m, n, p, q) .
- Utilisez la condition de second ordre pour vérifier si x_0 correspond à un maximum ou à un minimum. Expliquez. Quelle est la valeur de cet extremum (maximum ou minimum) en fonction de (m, n, p, q) ?

QUESTION 6: (15 points)

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + y = 6 - z, \\ 2x - z = -3 + y, \\ z = 6 - x - y. \end{cases}$$

- Écrivez le système sous forme matricielle $A.\mathbf{x} = b$.
- Résolvez le afin d'obtenir (x, y, z) en utilisant la méthode qui se fonde sur l'inverse de la matrice des coefficients. Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

QUESTION 7: (10 points)

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Écrivez le système sous forme matricielle $A.\mathbf{x} = b$. Trouvez la valeur-solution pour x_3 exclusivement en utilisant la méthode de Cramer. Expliquez comment vous procédez.