Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Automne 2009 **Professeur: Alain Delacroix**

EXAMEN FINAL

TRÈS IMPORTANT:
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question. Rendez l'examen **avec les questions**.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Pour chaque réponse, toutes les étapes doivent être clairement exposées.
- Utilisez une nouvelle page pour chaque nouvelle question. Indiquez clairement les numéros de chacune des questions.
- Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants en sortie d'examen. Aucune documentation n'est permise.

Question 1 (10 points):
Considérez la fonction suivante

$$f(x, y) = x^3.y - 2\frac{x}{y}.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema (minima ou maxima) *éventuels* par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez tout ce que vous faites.

Question 2 (10 points):
Considérez la fonction suivante

$$f(x, y) = \ln x - x^2 - y^2.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global. Expliquez tout ce que vous faites.

Question 3 (15 points):
Considérez la fonction suivante

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - x - 5y.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global. Expliquez tout ce que vous faites.
c. Soit la fonction $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - x - 5y + p$, où p est une constante. Trouver les valeurs de ce paramètre p telles que la fonction $g(x, y)$ ait toujours le même signe. Expliquez tout ce que vous faites.

Question 4 (15 points):
Considérez la fonction suivante
$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$
a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global. Expliquez tout ce que vous faites.

Question 5 (15 points):
Résolvez le problème suivant en utilisant la méthode de Lagrange:
$$\max_{x,y} e^{-x} + e^{-y} \quad t.q. \quad x + y = q,$$
où q est une constante positive.
a. Quel est le domaine de définition de la fonction à maximiser?
b. Chercher les points stationnaires. Expliquez tout ce que vous faites.
c. Appliquez la condition de second ordre. Obtenez-vous un maximum global? Pourquoi? Obtenez-vous un minimum global? Pourquoi?
d. Quelle est la valeur de cet extremum?

Question 6 (15 points):
Résolvez le problème suivant en utilisant la méthode de Lagrange:
$$\max_{x,y} \ln x + 2\ln y \quad t.q. \quad 2x + 5y = 6.$$
a. Quel est le domaine de définition de la fonction à maximiser?
b. Chercher les points stationnaires. Expliquez tout ce que vous faites.
c. Appliquez la condition de second ordre. Vérifier que vous obtenez un maximum global. Expliquez tout ce que vous faites.
d. Quelle est la valeur de ce maximum?

Question 7 (20 points):
Résolvez le problème suivant en utilisant la méthode de Lagrange:
$$\max_{c_a,c_b} u(c_a, c_b) = c_a^{1/2} c_b^{1/2} \quad t.q. \quad p_a c_a + p_b c_b = R,$$
où (p_a, p_b, R) sont des paramètres du problème (prix et revenu). Étant donné que la fonction à maximiser est l'utilité dérivée de la consommation des biens $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on peut supposer que $c_a > 0$ et $c_b > 0$.
a. Chercher les points stationnaires. Résolvez pour les deux niveaux de consommation (c_a^*, c_b^*) et pour le multiplicateur de Lagrange λ^*. Expliquez tout ce que vous faites.
b. Appliquez la condition de second ordre. Vérifier que vous obtenez un maximum global. Expliquez tout ce que vous faites.
c. Quelle est la valeur de l'utilité optimale correspondante? Appelez cette utilité maximale u^*. Comment est-ce que u^* dépend du revenu R? C'est à dire, calculez du^*/dR. Que remarquez vous?