

EXAMEN FINAL

TRÈS IMPORTANT:

- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question. Rendez l'examen **avec les questions**.
- Vous avez trois heures. Pour chaque réponse, toutes les étapes doivent être clairement exposées.
- Utilisez une nouvelle page pour chaque nouvelle question. Indiquez clairement les numéros des questions.
- Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle; pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué et remis aux étudiants en sortie d'examen. Aucune documentation n'est permise.

Question 1 (10 points):

Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = x^2 + \alpha xy + y^2,$$

où la paramètre $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 2$.

- Quel est le domaine de définition de f ? Expliquez.
- Cherchez les extrema (minima ou maxima) éventuels par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi? [*Remarquez que votre conclusion peut dépendre du paramètre α .*]
- Pourquoi avons nous précisé que $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 2$?

Question 2 (10 points):

Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = \ln(x^2 + p) + ye^{-py},$$

où la paramètre $p > 0$.

- Quel est le domaine de définition de f ? Expliquez.
- Cherchez les extrema (minima ou maxima) éventuels par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et second ordre. Expliquez tout.

Question 3 (15 points):

Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = e^{x^2} + e^{y^2}.$$

- Quel est le domaine de définition de f ? Expliquez.
- Cherchez les extrema (minima ou maxima) éventuels par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi?
- Pour quels p est-ce que la fonction $g(x, y) = e^{x^2} + e^{y^2} - \ln p$ est-elle toujours positive? Expliquez.

Question 4 (15 points):

Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = 100 - x^2 - x^4 - y^6 - y^8.$$

- Quel est le domaine de définition de f ? Expliquez.
- Cherchez les extrema (minima ou maxima) éventuels par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi?
- Quelle valeur cette fonction prend elle à son extremum? Expliquez.

Question 5 (15 points):

On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} e^{-x} + e^{-y} \quad t.q. \quad x + y = 2p.$$

- Comment peut-on réécrire ce problème comme un problème de maximisation sous contrainte? Expliquez.
- Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Expliquez.
- Vérifiez que les conditions de second ordre pour un maximum global sont satisfaites. Expliquez.
- Quelle est la valeur du minimum du problème initial? Expliquez. A quoi est il égal quand $p = \ln 2$?

Question 6 (15 points):

On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y,z} \ln(xyz) \quad t.q. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

On impose également que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$.

- Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Expliquez.
- Vérifiez que les conditions de second ordre pour un maximum global sont satisfaites. Expliquez. *[Remarquez que vous avez plusieurs façons équivalentes d'écrire la contrainte.]*
- Quelle valeur la fonction atteint à son maximum? Qu'est-ce que cela implique quant au signe de la fonction quand la contrainte est satisfaite? Expliquez.

Question 7 (20 points):

Nous reprenons un problème similaire au problème de l'allocation du temps d'un étudiant, vu en classe. L'étudiant a un temps total T à passer à préparer deux examens (A et B). S'il passe un temps t_A à préparer l'examen A , il aura une note égale à t_A . S'il passe un temps t_B à préparer l'examen B , il aura une note égale à $\sqrt{t_B}$. L'étudiant cherche à obtenir la note totale (somme des deux notes) la plus élevée.

- Écrivez la contrainte du problème et la fonction de (t_A, t_B) que l'étudiant cherche à maximiser.
- Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Expliquez.
- Vérifiez les conditions de second ordre pour un maximum global. Quelle est la note maximisée? Expliquez.
- Comment est-ce que cette note finale dépend du temps total T ? Comparez à λ .