Exercice 1:
Reprenez le problème de croissance optimale de Ramsey tel que vu en classe, mais en supposant que le ménage représentatif loue son capital à la firme au taux r_t et reçoit la partie non dépréciée du capital.

Exercice 2:
Soit $C[0,1]$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit la fonction $d_\infty : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$, telle que pour tout (f,g),

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| .$$

Montrez que $(C[0,1], d_\infty)$ est un espace métrique.
(J'ai peut-être (?) imprécisément formulé la deuxième condition pour une distance en classe. Celle-ci est "$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$".)

Exercice 3:
Soit un espace métrique (S,d). Montrez *(sans regarder les notes)* qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

Exercice 4:
(a) Montrez que $(C[0,1], d_2)$ où $C[0,1]$ est défini comme ci-dessus et

$$d_2(f,g) = [\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 \, dt]^{1/2},$$

est un espace métrique.
(Pour la suite, ne pas regarder les notes.)
(b) Considérez la suite de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n(t) = t^n$ pour tout $t \in [0,1]$. Quelle est la limite de cette suite?
(c) Montrez que c'est une suite de Cauchy.
(d) Est-ce que l'espace métrique est complet?

Exercice 5:
Soit $S = (0,1) \subset \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x - y|$ pour tout $(x,y) \in S^2$. Vérifiez par l'intermédiaire d'un contre-exemple que (S,d) n'est pas un espace métrique complet.