ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I **Hiver 2014**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Étudiez la fonction

$$f(x) = 9 \ln x - x.$$

Cela implique: *(i)* préciser les domaines de définition de f, f' et f'', *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f, (iv) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?
(v) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? Expliquez tout, *en utilisant les conditions de premier et second ordre.*
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 2: (15 points)
Soit la fonction

$$g_p(x) = p \ln x - x^2,$$

où p est un paramètre strictement positif.
Étudiez la fonction. Cela implique: *(i)* préciser les domaines de définition de g_p, g_p' et g_p'', *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction g_p, (iv) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?
(v) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? Expliquez tout, *en utilisant les conditions de premier et second ordre.*
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 3: (15 points)
Pour chaque fonction, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.
a. $f(x) = \sqrt{x}$; b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$; c. $f(x) = e^x - \ln x$; d. $f(x) = xe^{3x}$; e. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

QUESTION 4: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = 40 - q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = q^2.$$

a. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Détaillez vos calculs.
c. Supposez maintenant que la demande est $p = 40 - aq$, où a est un paramètre strictement positif. Résolvez le problème du monopoleur qui cherche à maximiser ses profits en choisissant la quantité q^*. Trouvez aussi le prix correspondant p^*. Vérifiez que cela est consistant avec ce que vous avez trouvé en (4b). Expliquez tout ce que vous faites.

QUESTION 5: (15 points)
a. Soit les fonctions $f(x) = x^2 + 2x + 2$ et $g(x) = \ln f(x)$. Étudiez la fonction $f(x)$ afin d'en déterminer le signe (à l'aide du tableau habituel). Déduisez-en le domaine de définition D_g de la fonction $g(x)$. Expliquez.
b. Nous cherchons à trouver l'extremum (maximum or minimum) de la fonction $g(x)$. Utilisez les conditions de premier et de second ordre afin de déterminer cet extremum. Est-ce un maximum ou un minimum? Est-il local ou global? Quelle valeur la fonction prend-elle à cet extremum? Expliquez tout.

QUESTION 6: (15 points)
Calculez *toutes* les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y, & f(x,y) = x \ln y, \\ f(x,y) = \frac{x}{y}, & f(k,h) = k^{1/3}h^{2/3}. \end{cases}$$

QUESTION 7: (10 points)
a. Pourquoi est-ce que la fonction f, définie sur $[0, +\infty)$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = 0, & si\ x = 0, \\ f(x) = e^x, & si\ x > 0, \end{cases}$$

n'est *pas* continue?
b. Pour une fonction d'une seule variable, donnez la *définition* d'une fonction strictement concave. En pratique, comment s'assure-t-on qu'une fonction est strictement concave (c'est à dire comment caractérise-t-on la stricte concavité?)
c. Énoncez le théorème de Young pour les fonctions de plusieurs variables.