ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I - Examen final **Hiver 2014**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.

Question 1 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) - y^2.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.
Soit la fonction

$$f(x,y) = xe^{-x} - y^2.$$

c. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
d. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.

Question 2 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y) = e^x + e^{-y} - x + \alpha y, \quad \text{où } \alpha > 0.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.

Question 3 (15 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y,z) = x^2 - \frac{3}{10}xy + y^2 + e^{(z-1)^2}.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi?
c. Pour quels $p > 0$ est-ce que $g(x,y,z) = x^2 - \frac{3}{10}xy + y^2 + e^{(z-1)^2} - \ln p$ est-elle toujours positive? Expliquez.

Question 4 (15 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y) = y - \frac{y^4}{32} - x^2.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi?
c. Quelle valeur cette fonction prend elle à son extremum? Expliquez.

Question 5 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \ln(xy^{\beta}) \quad t.q. \quad x + \alpha y = 1.$$

Nous restreignons l'analyse aux valeurs strictement positives de x et y.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*) en fonction de α et β. Expliquez.
b. Quelle condition faut-il imposer sur β pour que la condition de second ordre pour un maximum soit satisfaite? Expliquez. Nous prenons dorénavant cette hypothèse sur β pour le reste de la question.
c. Quelle condition sur (α, β) doit être satisfaite pour que $x^* = y^*$? Si cette condition est satisfaite, quelle est la valeur prise par le maximum au point stationnaire? Expliquez.

Question 6 (15 points):
On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \sqrt{xy} \quad t.q. \quad x + y = T.$$

On impose également que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $T > 0$.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x_1^*, y_1^*). Expliquez.
b. Vérifiez que les conditions de second ordre pour un maximum global sont satisfaites. Expliquez.
c. Quelle valeur la fonction atteint à son maximum? Nous appelons ce maximum m_1^*.
d. On considère maintenant le problème suivant:

$$\max_{x,y} \sqrt{xy} \quad t.q. \quad x + py = T,$$

où l'on suppose en plus que $p > 0$ et $p \neq 1$. Trouvez le point stationnaire (x_2^*, y_2^*) de ce nouveau problème, ainsi que le nouveau maximum m_2^*. Faut-il choisir le même x^* pour les deux problèmes? Le même y^*? Trouvez une condition sur p pour que $m_2^* > m_1^*$.

Question 7 (20 points):
a. On pose le problème de minimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y,z} e^x + e^{-y} + e^z \quad t.q. \quad x - y + z = 6.$$

Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*, z^*). Est-ce que les conditions de second ordre pour un minimum sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur de ce minimum m^*? Expliquez tout.
b. Est-ce que la fonction $f(x, y, z) = e^x + e^{-y} + e^z$ a un minimum sous la contrainte $x + y + z = 6$? A-t-elle un maximum sous cette même contrainte? Expliquez tout.