ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I **Hiver 2015**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Étudiez la fonction

$$f_p(x) = (1 + \ln x)^2 - p,$$

où $p \in \mathbb{R}$. Cela implique: *(i)* préciser les domaines de définition de f_p, f'_p et f''_p, *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f, (iv) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe? (v) cette fonction a-t-elle un extremum? de quel type (maximum ou minimum)? local ou global? *(vi)* pour quelles valeurs du paramètre p la fonction garde-t-elle un signe constant? Expliquez tout.
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 2: (15 points)
Soit la fonction

$$g_p(x) = (x + p)^2 + e^{px} - 3px,$$

Nous voulons démontrer que $g_p(x) \geq 1$ pour tout x dans son domaine de définition et tout $p > 0$. Pour cela, étudiez la fonction g_p. Cela implique: *(i)* préciser les domaines de définition de g_p, g'_p et g''_p, *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction g_p, (iv) Concluez que $g_p(x) \geq 1$. Expliquez tout.
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 3: (15 points)
Pour chaque fonction, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.
a. $f(x) = \sqrt{x+1}$; b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; c. $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$; d. $f(x) = xe^{2x}$; e. $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$.

QUESTION 4: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = \alpha - \beta q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée et (α, β) des paramètres réels strictement positifs. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = q^2.$$

a. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Détaillez vos calculs.
c. Montrez que le prix choisi par le monopoleur est toujours inférieur à α.
d. Est-ce que p^* dépend positivement ou négativement de α? deβ? Expliquez tout.

QUESTION 5: (15 points)
a. Soit la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + 2yz.$$

Calculez le hessien associé à cette fonction.
b. Soit la fonction

$$g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Quelles sont les conditions sur les paramètres α, β et γ pour que g soit strictement convexe? Expliquez.
c. Est-ce que la fonction $h(x) = x^2 - \ln x$ a un extremum? Est-ce un maximum ou un minimum? Local ou global? A quelle valeur de x est-il atteint? Quelle est la valeur de la fonction à ce point? *Répondez à cette question en utilisant la méthode qui consiste à passer par les conditions de premier et second ordre.*

QUESTION 6: (15 points)
Calculez *toutes* les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

$$f(x, y) = \ln(x^2) + y^2, \quad g(x, y) = xe^y + 27, \quad h(x, y) = \frac{x}{y}.$$

QUESTION 7: (10 points)
a. Qu'est-ce qu'une forme quadratique? Donnez la définition d'une forme quadratique positive définie, et celle d'une forme quadratique négative semi-définie.
b. Soit f une fonction strictement convexe. Supposez que x_0 est solution de $f'(x_0) = 0$ et que x_1 est solution de $f'(x_1) = 1$. Est-ce que $x_1 > x_0$ ou $x_0 > x_1$? Expliquez.
c. Montrez que si $f(x)$ est concave, alors $f(x) + px + r$ l'est également. Montrez que si $f(x, y)$ est convexe, alors $f(x, y) + px + qy + r$ l'est également (p, q et r sont des paramètres quelconques).