ECO 9015 **Automne 2014**

Examen final - solutions

Question 1:

(1) Le problème du planificateur est de maximiser l'utilité sous contrainte de ressources agrégées, i.e.

$$\max\ E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t[\psi u(c_t^a) + (1-\psi)u(c_t^b)],$$
$$t.q. \quad \begin{cases} k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_t^a + c_t^b = e^{z_t^a} f(h_t^a, k_t^a) + e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t^b), \\ k_t = k_t^a + k_t^b, \\ z_{t+1}^p = \rho z_t^p + \varepsilon_{t+1}^p,\ p \in \{a, b\}, \\ (z_0^a, z_0^b, k_0)\ \textit{donnés.} \end{cases}$$

Les choix se font sur les séquences $\{k_t^a\}_{t=0}^{+\infty}$, $\{k_t^b\}_{t=0}^{+\infty}$, $\{c_t^a\}_{t=0}^{+\infty}$, $\{c_t^b\}_{t=0}^{+\infty}$, $\{h_t^a\}_{t=0}^{+\infty}$, $\{h_t^b\}_{t=0}^{+\infty}$. Etant donné la nature de la fonction d'utilité, le choix des heures est trivial, $h_t^a = h_t^b = 1$ pour tout t.

(2) Si l'on écrit l'équation de Bellman à résoudre, il s'agit alors de déterminer des règles de décision. Dénotant, $z_t = \{z_t^a, z_t^b\}$, cette équation s'écrit

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_t^a, k_{t+1}, c_t^a} \psi u(c_t^a) + (1-\psi)u(c_t^b) + \beta E[v(k_{t+1}, z_{t+1})|z_t],$$
$$t.q. \quad \begin{cases} k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_t^a + c_t^b = e^{z_t^a} f(h_t^a, k_t^a) + e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t^b), \\ k_t = k_t^a + k_t^b, \\ z_{t+1}^p = \rho z_t^p + \varepsilon_{t+1}^p,\ p \in \{a, b\}, \\ (z_0, k_0)\ \textit{donnés.} \end{cases}$$

Ici aussi, les règles de décision pour h_t^a et h_t^b sont triviales. Nous avons également omis les choix redondants (k_t^b, c_t^b).

(Les variables d'état et de contrôle sont évidentes d'après l'équation de Bellman.)

(3) En insérant les contraintes à l'intérieur de la fonction de valeur, nous obtenons le problème suivant:

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_t^a, k_{t+1}, c_t^a} \psi u(c_t^a) + (1-\psi)u(e^{z_t^a} f(h_t^a, k_t^a) + e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t - k_t^a) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - c_t^a) + \beta E_t[v(k_{t+1}, z_{t+1})],$$
$$t.q. \quad \begin{cases} z_{t+1}^p = \rho z_t^p + \varepsilon_{t+1}^p,\ p \in \{a, b\}, \\ (z_0, k_0)\ \textit{donnés.} \end{cases}$$

(L'espérance est prise à la date t et est donc conditionnelle à z_t.)

La condition de premier ordre par rapport à k_t^a est

$$(1-\psi)[e^{z_t^a} f_2(h_t^a, k_t^a) - e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t - k_t^a)]u'(c_t^b) = 0.$$

Puisque $0 < \psi < 1$ et $u(.)$ est strictement concave, cela donne

$$e^{z_t^a} f_2(h_t^a, k_t^a) = e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t^b) \quad ou \quad PM_k^a = PM_k^b \text{ pour tout } t.$$

L'efficience productive requiert que le planificateur social égalise les produits marginaux du capital à travers pays.

La condition de premier ordre par rapport à c_t^a est $\psi u'(c_t^a) - (1-\psi)u(c_t^b) = 0$, autrement dit

$$\psi u'(c_t^a) = (1-\psi)u'(c_t^b) \quad ou \quad \psi UM_c^a = (1-\psi)UM_c^b \quad \text{pour tout } t.$$

Le choix optimal du planificateur implique que les utilités marginales de la consommation sont égalisées à travers pays (en tenant compte des pondérations sur l'utilité totale.)

La condition de premier ordre par rapport à k_{t+1} est

$$(1-\psi)u'(c_t^b) = \beta E_t[v_1(k_{t+1}, z_{t+1})].$$

Combiné avec le théorème de l'enveloppe,

$$v_1(k_t, z_t) = (1-\psi)[e^{z_t^b} f(h_t^b, k_t^b) + 1 - \delta]u'(c_t^b),$$

et ramené à la date $t+1$, cela donne

$$u'(c_t^b) = \beta E_t[(e^{z_{t+1}^b} f(h_{t+1}^b, k_{t+1}^b) + 1 - \delta)u'(c_{t+1}^b)]$$

Le choix du planificateur doit être optimal à travers deux périodes successives. Remarquez qu'étant donné les deux conditions du premier ordre ci-dessus, cela est équivalent à

$$u'(c_t^a) = \beta E_t[(e^{z_{t+1}^a} f_2(h_{t+1}^a, k_{t+1}^a) + 1 - \delta)u'(c_{t+1}^a)].$$

(4) Étant donné que la fonction d'utilité est strictement concave, les consommations ne peuvent être égales que s'il en est de même des utilités marginales. Ce n'est possible que si $\psi = 1 - \psi$ ou $\psi = 1/2$. Dans ce cas, le planificateur met le même poids sur les deux pays.

Question 2:

(1) La contrainte de budget en première période est

$$c_1 + k = \omega,$$

pusique les revenus exogèmnes sont utilisés pour consommer et investir. La contrainte de budget de la deuxième période est

$$c_2 = (1-\tau_k)Rk + (1-\tau_h)h,$$

pusiqu'il n'y a pas d'investissement en dernière période.

La contrainte de budget gouvernementale est

$$G = \tau_k RK + \tau_h H,$$

où des lettres capitales dénotent des valeurs agrégées.

(2) Il y a un problème d'incohérence temporelle car les choix de taux de taxe par le gouvernement se font après que certains choix des ménages (c_1 et k) aient été réalisés. Ainsi donc, τ_h et τ_k peuvent influencer c_1 et k, mais peuvent aussi être modifiés entre les deux périodes, une fois c_1 et k choisis irréversiblement. Bien sûr, les ménages s'attendent à cela... d'où la nécessité de considérer le plan temporellement consistent, plutôt que le plan optimal.

(3a) En deuxième période, les ménages prennent $(c_1, k; \tau_h, \tau_k)$ comme donnés. Les allocations (c_2, h) sont choisies pour

$$\max_{c_2,h} u(\overline{c}_1 + c_2, h) \quad t.q. \quad c_2 = (1 - \overline{\tau}_k)R\overline{k} + (1 - \overline{\tau}_h)h.$$

Les allocations sont donc fonction de $(\overline{c}_1, \overline{k}; \overline{\tau}_h, \overline{\tau}_k)$.

(3b) Entre les deux périodes, le gouvernement choisit les taux de taxe (τ_h, τ_k) prenant les choix agrégés de première période comme donnés et anticipant les relations provenant du problème ci-dessus, sujet à sa contrainte de budget. Ainsi, son problème est

$$\max_{\tau_h,\tau_k} u(\overline{c}_1 + c_2, h) \quad t.q. \quad G = \tau_k R\overline{K} + \tau_h H,$$

où (c_2, h, H) sont obtenus à partir du problème précédent, avec $h = H$.

(3c) En première période, les ménages choisissent (c_1, k) afin de maximiser leur utilité. Ils tiennent en compte que les futurs taux de taxe dépendent de $\overline{C}_1$et $\overline{K}$ (comme résolu dans (3b)). A l'équilibre, $(c_1, k) = (C_1, K)$. *(Pour un traitement plus formel, voir les notes de cours.)*

Question 3:

(a) Voir notes des chapitres sur la méthode linéaire-quadratique (9) ou sur la méthode par perturbation (12.3).

(b) Voir chapitre 10.3.

(c) Voir chapitre 19.2.

(d) Voir chapitre 11.1.

(e) Les chocs gouvernementaux opèrent par un effet de richesse et affectent donc l'offre de travail. Les chocs technologiques affectent la demande de travail. Le premier type de choc induit une corrélation négative entre travail et productivité, alors que le second induit une corrélation négative.

(f) Voir chapitre 12, surtout 12.3.

(g) Voir chapitre 12.1.

(h) Le problème d'équilibre est le suivant. Les ménages

$$\max_{c_t,h_t} \ln c_t + A\ln(1-h_t) \quad t.q. \quad w_t h_t = c_t + T_t.$$

Le problème des firmes est de

$$\max_{h_t} z_t h_t - w_t h_t.$$

Le gouvernement balance son budget, i.e.

$$g_t = T_t.$$

Le problème des ménages donne la condition de premier ordre suivante,

$$\frac{w_t}{w_t h_t - T_t} = \frac{A}{1-h_t}.$$

Utilisant le problème des firmes ($w_t = z_t$) et la contrainte du gouvernement ($g_t = T_t$), on arrive à

$$\frac{z_t}{z_t h_t - g_t} = \frac{A}{1-h_t},$$

ou

$$(1+A)z_t h_t = z_t + Ag_t.$$

Définissons pour toute variable x, $\widehat{x}_t = \ln(x_t/x^*)$ où x^* est la valeur stationnaire de x. De façon équivalente, $x_t = x^* e^{\widehat{x}_t}$. Alors,

$$\begin{aligned} & (1+A)z^*h^*e^{\widehat{z}_t+\widehat{h}_t} = z^*e^{\widehat{z}_t} + Ag^*e^{\widehat{g}_t}, \\ \Longrightarrow\ & (1+A)z^*h^*(1+\widehat{z}_t+\widehat{h}_t) \approx z^*(1+\widehat{z}_t) + Ag^*(1+\widehat{g}_t). \end{aligned}$$

Comme, à l'état stationnaire, $(1+A)z^*h^* = z^* + Ag^*$, cela se simplifie comme

$$(z^* + Ag^*)(\widehat{z}_t + \widehat{h}_t) \approx z^*\widehat{z}_t + Ag^*\widehat{g}_t,$$

i.e.

$$\widehat{h}_t \approx \frac{Ag^*}{1+Ag^*}(\widehat{g}_t - \widehat{z}_t),$$

puisque $z^* = 1$.

(i) Le problème d'équilibre est le suivant. Les ménages

$$\max_{c_t,h_t} \ln c_t + A\ln(1-h_t) \quad t.q. \quad (1-\tau)w_t h_t = c_t + T_t.$$

Le problème des firmes est de

$$\max_{h_t} z_t h_t - w_t h_t.$$

Le gouvernement balance son budget, i.e.

$$g_t = T_t + \tau w_t H_t.$$

Le problème des ménages donne la condition de premier ordre suivante,

$$\frac{(1-\tau)w_t}{(1-\tau)w_t h_t - T_t} = \frac{A}{1-h_t}.$$

Utilisant le problème des firmes et la contrainte du gouvernement, on arrive à

$$\frac{(1-\tau)z_t}{z_t h_t - g_t} = \frac{A}{1-h_t},$$

ou

$$(1-\tau+A)z_t h_t = (1-\tau)z_t + A g_t.$$

Après transformation des variables,

$$\begin{aligned} &(1-\tau+A)z^* h^* e^{\widehat{z}_t+\widehat{h}_t} = (1-\tau)z^* e^{\widehat{z}_t} + Ag^* e^{\widehat{g}_t}, \\ \implies &(1-\tau+A)z^* h^*(1+\widehat{z}_t+\widehat{h}_t) \approx (1-\tau)z^*(1+\widehat{z}_t) + Ag^*(1+\widehat{g}_t). \end{aligned}$$

Utilisant à nouveau la relation à l'état stationnaire,

$$(1-\tau+A)z^* h^*(\widehat{z}_t+\widehat{h}_t) \approx (1-\tau)z^*\widehat{z}_t + Ag^*\widehat{g}_t.$$

De là, nous obtenons

$$\widehat{h}_t \approx \frac{Ag^*}{1-\tau+Ag^*}(\widehat{g}_t - \widehat{z}_t).$$

En comparant les deux règles de décision, on voit que les heures sont plus volatiles sous les taxes distortionnaires.

(j) Il bâtit une réputation en mimiquant au gouverneur qui ne se préoccupe que de l'inflation. Au coût d'une inflation qui ne serait pas son choix optimal en première période, il réduit (de façon bénéfique) les anticipations d'inflation en deuxième période. Ce sacrifice n'a de sens que si le taux d'escompte est suffisament élevé.