Solutionnaire

Intra ECO 9015

Automne 2015

Question 1:

(1a) $\begin{cases} \text{Variables d'état : } k_t, g_t. \\ \text{Variables de contrôle : } k_{t+1}, g_{t+1}. \end{cases}$

- La fonction de valeur est donc:

$$V(k_t, g_t) = \max_{k_{t+1}, g_{t+1}} \{ u(c_t) + \beta V(k_{t+1}, g_{t+1}) \}$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t + g_{t+1} = f(k_t, g_t)$$

$$(k_0, g_0) \text{ donnés.}$$

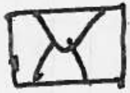
C'est le problème du planificateur, donc nous utilisons la contrainte de ressource agrégée.

- $\text{CPO}[k_{t+1}]: \quad -u'(c_t) + \beta V_1(k_{t+1}, g_{t+1}) = 0$

$\text{CPO}[g_{t+1}]: \quad -u'(c_t) + \beta V_2(k_{t+1}, g_{t+1}) = 0$

$(k_t): \quad V_1(k_t, g_t) = [f_1(k_t, g_t) + 1 - \delta] \, u'(c_t)$

$(g_t): \quad V_2(k_t, g_t) = f_2(k_t, g_t) \, u'(c_t)$

Combinant CPO's et 's : $\begin{cases} u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left[f_1(k_{t+1}, g_{t+1}) + 1 - \delta \right] \\ u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \, f_2(k_{t+1}, g_{t+1}) \end{cases}$

(Remarquez que nous obtenons une "condition d'arbitrage" entre les deux formes de non-consommation:

$$\underbrace{f_1(k_t, g_t) + 1 - \delta}_{\substack{\text{rendement de} \\ \text{l'investissement} \\ \text{en capital}}} = \underbrace{f_2(k_t, g_t)}_{\substack{\text{rendement de} \\ \text{l'investissement} \\ \text{en infrastructure.}}}$$

(1b) A l'état stationnaire, les valeurs restent constantes, et les dénotant (k, g, c):

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(c) = \beta u'(c) \left[f_1(k, g) + 1 - \delta \right] \\ u'(c) = \beta u'(c) \, f_2(k, g) \\ c + \delta k + g = f(k, g) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \beta \left[f_1(k, g) + 1 - \delta \right] & \text{(CPO)} \\ f_2(k, g) = f_1(k, g) + 1 - \delta & \text{(arbitrage)} \\ c + \delta k + g = f(k, g) & \text{(contrainte ressource)} \end{cases}$$

- On a la relation habituelle entre le rendement du capital et le taux d'escompte.
  (qui reflète la décision intertemporelle optimale d'investissement en capital)

- On a une condition d'arbitrage : l'investissement dans les deux facteurs doit amener le même rendement.

- On a la contrainte de ressource agrégée : toute la production est utilisée.

(1c) Avec $\delta = 1$, la condition d'arbitrage devient:

$$f_1(k, g) = f_2(k, g)$$

1ère réponse

Si la fonction a des rendements d'échelle constants, on sait que f_1 et f_2 sont des fonctions du ratio des facteurs k/g seulement.

Alors, les deux conditions ($\beta f_1 = 1$ et $f_1 = f_2$) ne peuvent être satisfaites simultanément. En effet, chaque condition impose une valeur pour le ratio k/g et ces deux conditions sont indépendantes.

<u>2è réponse</u> Prenons $f(k,g) = k^\alpha g^{1-\alpha}$.

Alors $f_1 = f_2$ implique que $\frac{g}{k} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

Et $\beta f_1 = 1$ implique que $\frac{g}{k} = (\alpha\beta)^{1/(\alpha-1)}$.

Ces deux conditions ne peuvent être satisfaites simultanément.

(1d) Nous supposons donc que les rendements d'échelle sont décroissants, $f(k,g) = z\, k^\alpha g^\gamma$ $(\alpha+\gamma<1)$

On trouve que: $f_1(k,g) = z\,\alpha\, k^{\alpha-1} g^\gamma$, donc:

(à l'état stationnaire) $\frac{\text{Inv.}}{\text{PIB}} = \frac{\delta k}{z k^\alpha g^\gamma} = \frac{\delta}{z k^{\alpha-1} g^\gamma} = \frac{\delta}{f_1/\alpha} = \alpha\beta\delta$.

Ce ratio est indépendant de z.

* Si $\alpha \uparrow$, la production est plus intensive en capital et l'investissement augmente.
* Si $\beta \uparrow$, les ménages sont plus "patients" et investissent plus.
* Si $\delta \uparrow$, il faut investir plus pour couvrir la dépréciation.

(1e) L'approche Lagrangienne nous donne:

$$\max_{\{k_{t+1}, g_{t+1}, c_t\}_{t=0\ldots+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_{t+1} = f(k_t, g_t)$$

(pour tout t)

(k_0, g_0) donnés.

Nous formons le Lagrangien:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}, g_{t+1}\}_{t=0\ldots+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \Big[\beta^t u(c_t) + \lambda_t \big(f(k_t, g_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - g_{t+1}\big)\Big]$$

(1f) Les conditions de premier ordre sont:

$[c_t] \quad \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0$

$[k_{t+1}] \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}\left[f_1(k_{t+1}, g_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 0$

$[g_{t+1}] \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1} f_2(k_{t+1}, g_{t+1}) = 0$

On obtient, en combinant les deux dernières équations:

$$f_1(k_{t+1}, g_{t+1}) + 1 - \delta = f_2(k_t, g_t) \qquad t = 0\ldots+\infty$$

(condition d'arbitrage)

La première équation donne :

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t = \lambda_{t+1} f_2(k_{t+1}, g_{t+1})$$
$$= \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) f_2(k_{t+1}, g_{t+1}).$$

Donc, $\quad u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) f_2(k_{t+1}, g_{t+1}) \qquad (t=0 \ldots +\infty).$

Question 2 :

(2a) Variable d'état : H_t.

Variable de contrôle : H_{t+1}.

(2b) $$V(H_t) = \max_{H_{t+1}} \; u(c_t) + \beta V(H_{t+1})$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} c_t + H_{t+1} = H_t, \\ H_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

CPO $[H_{t+1}]$: $\quad -u'(c_t) + \beta V'(H_{t+1}) = 0$

(H_t) : $\quad V'(H_t) = u'(c_t)$

En combinant : $\quad u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})$

Le taux marginal de substitution entre deux périodes est $\dfrac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1$.

Ce n'est pas comme un investissement en capital où le $TMS = 1 + r_{t+1} - \delta$ et représent le rendement du sacrifice en consommation.

Ici, il n'y a pas de rendement. La ressource initiale ne fait que fondre...

(2c) Là, il y a une seconde variable d'état, ε_t.

L'équation de Bellman devient:

$$V(H_t, \varepsilon_t) = \max_{H_{t+1}} \; u(c_t) + \beta E V(H_{t+1}, \varepsilon_{t+1})$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} c_t + H_{t+1} = H_t + \varepsilon_t \\ (H_0, \varepsilon_0) \text{ donnés.} \end{cases}$$

Résolvons la: CPO $[H_{t+1}]$ $\quad -u'(c_t) + \beta E V_1(H_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) = 0$

(H_t) $\quad V_1(H_t, \varepsilon_t) = u'(c_t)$

Donc, $\quad u'(c_t) = \beta E u'(c_{t+1})$.

Question 3 :

a) Pb de la firme (s) :

$$\max_{n} \; s\sqrt{n} - wn$$

$\Longrightarrow$ CPO [n] : $\dfrac{s}{2\sqrt{n}} = w \quad \rightarrow \quad n^d(s) = \dfrac{s^2}{4w^2}$

b) Par définition, $\pi(s) = s\sqrt{n^d(s)} - w\, n^d(s)$

$$\Rightarrow \pi(s) = s\,\frac{s}{2w} - w\,\frac{s^2}{4w^2}$$

$$\Rightarrow \pi(s) = \frac{s^2}{4w}$$

c) Le ratio est égal à : $\dfrac{\pi(s)}{n^d(s)} = \dfrac{s^2}{4w}\,\dfrac{4w^2}{s^2} = w$.

Cela est normal, $\pi = wn$. Puisque la part du travail est 1/2, les revenus de l'entreprises sont répartis également entre salaires et profits. [En fait, on n'avait pas besoin de (a)-(b), pour répondre à cette question.]

d) La valeur nette d'entrée est égale à la valeur espérée d'être sur le marché, moins les coûts d'entrée.

$$\Rightarrow V_e = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, \pi(s_i) - c_e$$

e) La libre entrée des firmes implique que $V_e = 0$. Sinon, les firmes n'agiraient pas de façon optimale.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \nu_i \frac{s_i^2}{4w} = c_e \Rightarrow w = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{4 c_e}$$

f) Il suffit de remplacer s_i par $z s_i$, pour trouver:

$$w(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i (z s_i)^2}{4 c_e} = z^2 \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{4 c_e} = z^2 w(1)$$

Donc, $\eta_{wz} = \dfrac{z \left(2 z w(1)\right)}{z^2 w(1)} = 2.$

g) Il suffit de remplacer w par $(1+\tau) w$, puisque les firmes prenaient leur coûts salariaux comme donnés.

+ On trouverait donc : $(1+\tau) w = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i S_i^2}{4 C_e}$

$$\Rightarrow w = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i S_i^2}{4(1+\tau) C_e}$$

(Quand $\tau \uparrow$, le salaire diminue.)

+ L'approche habituelle est qu'il y a un seul salaire

qui va être consistent avec à la fois le choix optimal d'emploi par les firmes et la libre entrée. Autrement dit, V_e est décroissant en w.

Avec les taxes en plus, le raisonnement est le même, mais en prenant en compte tous les coûts salariaux de la firme, $(1+\tau) w$.
Donc, il y a un $(1+\tau)w$ unique à l'équilibre.
Une augmentation de τ doit être compensée par une diminution de w.

h) Par définition, $\Pi^{agg.}_{/ent.} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, \pi(s_i)$

$$= \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, \frac{s_i^2}{4w}$$

$$= \frac{1}{4w} \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, s_i^2$$

$$= \frac{1}{4} \frac{4c_e}{\sum_i \nu_i s_i^2} \sum_i \nu_i s_i^2 = c_e$$

Cela revient à dire que $\Pi^{agg.}_{/ent.}$ = coûts d'entrée par entrant.

C'est une implication de la libre entrée.

* Par définition, $Y^{agg.}_{/ent.} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, s_i \sqrt{n^d(s_i)}$

$$= \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, s_i \, \frac{s_i}{2w} = \frac{1}{2w} \sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4c_e}{\sum_i \nu_i s_i^2} \sum_i \nu_i s_i^2$$

$$\Rightarrow Y^{agg}_{/ent} = 2\,c_e$$

[Remarque: $Y^{agg}_{/ent.} = 2\,\Pi^{agg.}_{/ent}$, ce qui est consistent avec c).]

i) Le pb du ménage est $\max_{c,N} \ Ln\, c - AN$

$$\text{t.q. } c = wN + \Pi$$

Insérant la contrainte dans l'objectif:

$$\rightarrow \max_{N} \ Ln\left[wN + \Pi\right] - AN$$

Donc, CPO [N] : $\frac{w}{c} = A \Rightarrow c = \frac{w}{A}$

$$c = \frac{\sum_i \nu_i s_i^2}{4 A c_e}$$

j) L'équilibrage du marché des biens donne:

$$\underbrace{c}_{\text{demande des ménages}} + \underbrace{M c_e}_{\text{demande des firmes}} = \underbrace{M \left[Y^{agg.}/_{ent} \right]}_{\text{offre}}$$

$$\Rightarrow c + M c_e = 2 M c_e$$

$$\Rightarrow M = c/c_e = \frac{\sum_i \nu_i s_i^2}{4 A c_e^2}$$

On peut vérifier que $\frac{dM}{dc_e} < 0$

L'inefficience compétitive reflète que les coûts d'entrée réduisent l'entrée et donc la production.