ECO 9015

Final Aut. 2015

Solutionnaire.

QUESTION 1

1) Pas de taxe distortionnaire, ni d'externalité

2) $\begin{cases} \text{Etat: } k_t, \mu_t \\ \text{Contrôle: } k_{t+1}, h_t \end{cases}$

$$V(k_t, \mu_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \left\{ \ln c_t + \mu_t \ln(1-h_t) + \beta E\left[V(k_{t+1}, \mu_{t+1}) \,|\, \mu_t \right] \right\}$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha}$$

3) $CPO[k_{t+1}]$ $\quad \frac{1}{c_t} = \beta E_t\left[V_1(k_{t+1}, \mu_{t+1}) \,|\, \mu_t \right]$

$CPO[h_t]$ $\quad \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha} \frac{1}{c_t} = \frac{\mu_t}{1-h_t} = \frac{\mu_t}{l_t}$

$$V_1(k_t, \mu_t) = \frac{1}{c_t} (1-\alpha) h_t^{\alpha} k_t^{-\alpha}$$

Donc,

$$\begin{cases} E_t\left[\beta \frac{c_t}{c_{t+1}} (1-\alpha) h_{t+1}^{\alpha} k_{t+1}^{-\alpha} \right] = 1 & \text{(A)} \\ \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha} \frac{1}{c_t} = \frac{\mu_t}{l_t} & \text{(B)} \\ c_t + k_{t+1} = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} & \text{(C)} \\ h_t + l_t = 1 & \text{(D)} \\ \ln \mu_t = \rho \ln \mu_{t-1} + \varepsilon_t & \text{(E)} \end{cases}$$

4) Posons $\hat{x}_t = \ln \frac{x_t}{x^*}$, où x^* est la valeur stationnaire.

$$\text{(A)} \longrightarrow E\left[\beta \frac{c^* e^{\hat{c}_t}}{c^* e^{\hat{c}_{t+1}}} (1-\alpha) \left(h^* e^{\hat{h}_{t+1}}\right)^{\alpha} \left(k^* e^{\hat{k}_{t+1}}\right)^{-\alpha}\right] = 1$$

$$\longrightarrow E\left[e^{\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + \alpha(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1})}\right] = 1$$

$$\longrightarrow E\left[\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + \alpha(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1})\right] \simeq 0$$

$$\longrightarrow \hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + \alpha(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}) \overset{\nu}{\sim} 0$$

$$\text{(B)} \quad \alpha \left[h^* e^{\hat{h}_t}\right]^{\alpha-1} \left[k^* e^{\hat{k}_t}\right]^{1-\alpha} \frac{1}{c^* e^{\hat{c}_t}} = \frac{e^{\hat{\gamma}_t}}{l^* e^{\hat{l}_t}}$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha-1)(\hat{h}_t - \hat{k}_t) - \hat{c}_t} = e^{\hat{\gamma}_t - \hat{l}_t}$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)(\hat{h}_t - \hat{k}_t) - \hat{c}_t = \hat{\gamma}_t - \hat{l}_t$$

(C) $$c^* e^{\hat{c}_t} + k^* e^{\hat{k}_{t+1}} = \left[h^* e^{\hat{h}_t}\right]^{\alpha} \left[k^* e^{\hat{k}_t}\right]^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow c^* (1 + \hat{c}_t) + k^* (1 + \hat{k}_{t+1}) \approx (h^*)^{\alpha} (k^*)^{1-\alpha} \left[1 + \alpha \hat{h}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t\right]$$

$$\Rightarrow c^* \hat{c}_t + k^* \hat{k}_{t+1} \approx y^* \left[\alpha \hat{h}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t\right]$$

$$\Rightarrow \frac{c^*}{y^*} \hat{c}_t + \frac{k^*}{y^*} \hat{k}_{t+1} \approx \alpha \hat{h}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t$$

(D) $$h^* e^{\hat{h}_t} + l^* e^{\hat{l}_t} = 1$$

$$\rightarrow h^* (1 + \hat{h}_t) + l^* (1 + \hat{l}_t) \approx 1$$

$$\rightarrow h^* \hat{h}_t + l^* \hat{l}_t \approx 0$$

(E) $$\hat{\mu}_t = \rho \hat{\mu}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (\mu^* = 1)$$

5) Sans capital

$$V(p_t) = \max_{h_t} \left\{ \alpha \ln h_t + p_t \ln(1-h_t) + \beta E\left[V(p_{t+1}) \mid p_t\right] \right\}$$

Problème statique : $[h_t]$ $\frac{\alpha}{h_t} = \frac{p_t}{1-h_t} = \frac{p_t}{l_t}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{h_t} = \frac{p_t}{l_t} \\ c_t = h_t^\alpha \\ h_t + l_t = 1 \\ \ln p_t = \rho \ln p_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

6.) Donc, $\begin{cases} \frac{\alpha}{h^* e^{\hat{h}_t}} = \frac{e^{\hat{p}_t}}{l^* e^{\hat{l}_t}} \\ c^* e^{\hat{c}_t} = \left[h^* e^{\hat{h}_t}\right]^\alpha \\ h^* e^{\hat{h}_t} + l^* e^{\hat{l}_t} = 1 \\ \hat{p}_t = \rho \hat{p}_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{array}{l} e^{\hat{h}_t} = e^{\hat{l}_t - \hat{p}_t} \\ e^{\hat{c}_t} = e^{\alpha \hat{h}_t} \\ h^*(1+\hat{h}_t) + l^*(1+\hat{l}_t) \simeq 1 \\ \hat{p}_t = \rho \hat{p}_{t-1} + \varepsilon_t \end{array}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{h}_t = \hat{l}_t - \hat{p}_t \\ \hat{c}_t = \alpha \hat{h}_t \\ h^* \hat{h}_t + l^* \hat{l}_t \approx 0 \\ \hat{p}_t = \rho \hat{p}_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

∘ État stationnaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{h^*} = \dfrac{1}{l^*} \\ c^* = (h^*)^\alpha \\ h^* + l^* = 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{\alpha}{h^*} = \frac{1}{1-h^*} \longrightarrow h^* = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\longrightarrow l^* = \frac{1}{1+\alpha}$$

$$\longrightarrow c^* = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}\hat{h}_t + \frac{1}{1+\alpha}\hat{l}_t \approx 0$$

$$\Rightarrow \alpha \hat{h}_t + \hat{l}_t \approx 0$$

$$\Rightarrow \hat{h}_t \approx -\alpha \hat{h}_t - \hat{\gamma}_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{h}_t \approx -\frac{\hat{\gamma}_t}{1+\alpha}}$$

$$\boxed{\hat{l}_t \approx \frac{\alpha}{1+\alpha}\hat{\gamma}_t}$$

$$\boxed{\hat{c}_t \approx -\frac{\alpha}{1+\alpha}\hat{\gamma}_t}$$

7) $\hat{c}_t = \alpha \hat{h}_t \Rightarrow \operatorname{Ln} c_t - \operatorname{Ln} c^* = \alpha \left[\operatorname{Ln} h_t - \operatorname{Ln} h^*\right]$

$$\Rightarrow d \operatorname{Ln} c_t = \alpha \, d \operatorname{Ln} h_t$$

$$\Rightarrow \text{élasticité } (c_t, h_t) = \alpha.$$

Question 2

(1) Etats : k_t, g_t, z_t.

Contrôles : k_{t+1}, h_t.

(2) L'équation de Bellman est :

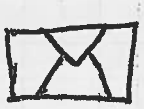
$$V(k_t, g_t, z_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \left\{ u(c_t + g_t, l_t) + \beta \, \underset{z,g}{E} V(k_{t+1}, z_{t+1}, g_{t+1}) \right\}$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t + g_t = z_t f(h_t, k_t) \\ l_t + h_t = 1 \\ \operatorname{Ln} z_t = \rho \operatorname{Ln} z_{t-1} + \varepsilon_t \\ \operatorname{Ln} g_t = \lambda \operatorname{Ln} g_{t-1} + \eta_t \\ (k_0, g_0, z_0) \text{ donnés} \end{cases}$$

Problème optimal $\rightarrow$
- Pas de prix, pas de transfert/taxe.
- Pas de firme.
- Contrainte de ressource agrégée.

CPO $[k_{t+1}]$ $\quad u_1(c_t + g_t, l_t) = \beta E_{zg} V_1(k_{t+1}, z_{t+1}, g_{t+1})$

CPO $[h_t]$ $\quad z_t f_1(h_t, k_t) u_1(c_t + g_t, 1 - h_t) = u_2(c_t + g_t, 1 - h_t)$

 $\quad V_1(k_t, g_t, z_t) = \left[z_t f_2(h_t, k_t) + 1 - \delta \right] u_1(c_t + g_t, 1 - h_t)$

Donc, les CPOs sont:

$$\begin{cases} E_{z,g}\left[\beta \dfrac{u_1(c'+g', 1-h')}{u_1(c+g, 1-h)}\left(z' f_2(h', k') + 1 - \delta\right)\right] = 1 \\ z f_1(h,k)\, u_1(c+g, 1-h) = u_2(c+g, 1-h) \end{cases}$$

(où un "prime" représente la période suivante.)

---

(3) Le problème de la firme est de

$$\max_{h,k} \; z f(h,k) - w h - r k$$

$$\begin{cases} \text{CPO}\,[h^d] : & z f_1(h,k) = w \\ \text{CPO}\,[k^d] : & z f_2(h,k) = r \end{cases}$$

(4) Etats: k, g, z

Contrôle: h, k'

L'équation de Bellman est :

$$V(k,g,z) = \max_{k',h} \left\{ u(c+g, 1-h) + \beta E_{z,g} V(k', g', z') \right\}$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} c + k' - (1-\delta)k + T = wh + rk \\ \ln z = \rho \ln z_{-1} + \varepsilon \\ \ln g = \lambda \ln g_{-1} + \eta \\ (k_0, g_0, z_0) \text{ donnés} \end{cases}$$

CPO $[k']$ $\quad u_1(c+g, 1-h) = \beta E_{z,g} V_1(k', g', z')$

CPO $[h]$ $\quad w\, u_1(c+g, 1-h) = u_2(c+g, 1-h)$

$$V_1(k,g,z) = (r+1-\delta)\, u_1(c+g, 1-h)$$

$$\Rightarrow u_1(c+g, 1-h) = \beta E_{z,g}\left[(r'+1-\delta)\, u_1(c'+g', 1-h')\right]$$

(5) L'ensemble des conditions d'équilibre :

+ il faut imposer l'équilibre budgétaire du gvt,

$g = T$, pour tout t.

+ Alors les conditions d'équilibre sont :

Firme

$z f_1(h,k) = w$

$z f_2(h,k) = r$

Ménage

$$E_{z,g}\left[\beta \frac{u_1(c'+g', 1-h')}{u_1(c+g, 1-h)} (r'+1-\delta)\right] = 1$$

$$w\, u_1(c+g, 1-h) = u_2(c+g, 1-h)$$

$$c + k' - (1-\delta)k + T = wh + rk$$

Gvt $\quad g = T$

. On retrouve la CPO (k') du problème optimal en remarquant que $r = z f_2(h, k)$.

. On retrouve la CPO (h) du problème optimal en remarquant que $w = z f_1(h, k)$.

. On retrouve la contrainte de ressource agrégée de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\text{CPO firme } (h)\\ \text{CPO firme } (k)\\ \text{Th. Euler}\end{array}\right\} \rightarrow wh + rk = z f(h, k)$$

Eq. budgétaire du gvt $\rightarrow$ $T = g$.

$\rightarrow$ les deux allocations coïncident.

6) . Quand $g = 0, \forall t$ $\rightarrow$ on sait résoudre.

. En regardant les conditions du problème optimal, on voit que c et g n'apparaissent jamais séparément, mais plutôt toujours ensemble comme "$c + g$".

- Dénotons $C_t = c + g$.
- Résoudre pour C_t revient à résoudre l'environnement $\mathcal{E}_0$.
- Dans ce cas, c (dans l'environnement $\mathcal{E}$) est obtenu simplement comme $c = C_t - g$, puisque g est exogène au problème.

Intuitivement, on peut procéder ainsi, car consommation du bien privé et du bien public sont des substituts parfaits. Donc, si on a un choc sur les dépenses publiques, la consommation privée est ajustée de la même quantité, mais en sens inverse.