ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I - Examen final **Hiver 2016**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.

ATTENTION: Dans tout l'examen, quand on vous demande de chercher les extrema d'une fonction, cela veut dire:"cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.".

Question 1 (15 points):
Soit la fonction

$$f(x, y) = x \ln x + y \ln y.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Cherchez les extrema de f.
Soit la fonction

$$g_p(x, y) = x \ln x^p + y \ln y^p,$$

où p est un paramètre non nul.
b. Quel est le domaine de définition de g_p? Supposez d'abord que $p > 0$. Cherchez les extrema de g_p.
c. Supposez maintenant que $p < 0$. Cherchez les extrema de g_p.
d. Utilisez vos résultats pour montrer que la fonction g_p ne garde jamais un signe constant, quelle que soit la valeur de p.

Question 2 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{xy}{2}.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Cherchez les extrema de f.
b. À quel point la fonction $g(x, y) = 20f(x, y)$ atteint son extremum? Quelle est la valeur de cet extremum? Mêmes questions pour $h(x, y) = -1000f(x, y) + 100$. Expliquez.

Question 3 (15 points):
(a) Montrez que la fonction

$$f(x, y) = x^2y - 2x - y + \pi$$

n'a pas de maximum.
b. Soit la fonction

$$g_q(x, y) = x + qe^{-x} + y^2,$$

où q est un paramètre strictement positif. Montrer que g_q a un minimim strict global. À quel point est-il atteint? Quelle est la valeur de ce minimum? Expliquez tout.
c. Pour quelles valeurs de q est-ce que $g_q(x, y) > 0$ pour tout (x, y)? Expliquez.

Question 4 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = x - (1 + x^2)y^2 - x^2.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema de f.
c. Quelle valeur cette fonction prend-elle à son extremum? Expliquez.

Question 5 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \ \ln x + \ln y \quad t.q. \quad \alpha^2 x + y = 2\alpha,$$

où α est un paramètre strictement positif.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*). Expliquez.
b. Vérifiez que les conditions de second ordre sont satisfaites. Expliquez.
c. Quelle valeur la fonction atteint-elle au point stationnaire?

Question 6 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} \ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \quad t.q. \quad x + y = \alpha.$$

Nous restreignons l'analyse aux valeurs strictement positives de x et y. Le paramètre α est également supposé strictement positif.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*) en fonction de α. Expliquez.
b. Utilisez les conditions de second ordre pour vérifier que (x^*, y^*) est la solution du problème.
c. Pour quelles valeurs de α est-ce que $\frac{x^3+y^3}{x^3y^3} \geq 2$, pour tout point (x, y) satisfaisant la contrainte $x + y = \alpha$? Expliquez.

Question 7 (20 points):
a. On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \ x^p + y^p \quad t.q. \quad x + y = T.$$

Nous nous restreignons au cas où x, y et T sont strictement positifs et où $0 < p < 1$. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*). Est-ce que les conditions de second ordre pour un maximum sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur M^* du maximum atteint?

b. Le problème est maintenant de

$$\min_{x,y} \frac{1}{x^p} + \frac{1}{y^p} \quad t.q. \quad x + y = T.$$

Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*). Est-ce que les conditions de second ordre sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur m^* du minimum atteint?
c. Calculez le multiplicateur de Lagrange λ^* associé au problème en (7a). Quelle interprétation peut-on en faire?