

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)

Étudiez la fonction

$$f(x) = e^{-x} + x.$$

Cela implique: (i) calculer les dérivées premières et secondes - et préciser leurs domaines de définition respectifs, (ii) produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonie et de concavité de la fonction f , (iii) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?

(iv) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? Expliquez.
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 2: (15 points)

Soit la fonction

$$g_p(x) = \ln(x + p) - x,$$

où p est un paramètre.

Étudiez la fonction g_p . Cela implique: (i) calculer les dérivées premières et secondes - et préciser leurs domaines de définition respectifs, (ii) produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonie et de concavité de la fonction g_p , (iii) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?

(iv) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? Expliquez.
(v) Pour quelles valeurs de p cette fonction garde-t-elle un signe constant? Expliquez.

Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 3: (15 points)

Pour chaque fonction, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.

a. $f(x) = \sqrt{x}$; b. $f(x) = \ln x^2$; c. $f(x) = e^x - \ln x$; d. $f(x) = xe^{2x}$; e. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

QUESTION 4: (15 points)

Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = 10 - \ln q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = 5q.$$

- Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
- Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Détaillez vos calculs.
- Supposez maintenant que le coût est $C(q) = cq$, où c est un paramètre strictement positif. Résolvez le problème du monopoleur qui cherche à maximiser ses profits en choisissant la quantité q^* . Trouvez aussi le prix correspondant p^* . Vérifiez que cela est consistant avec ce que vous avez trouvé en (4b). Expliquez tout.

QUESTION 5: (15 points)

- Soit la forme quadratique $q(x, y) = x^2 + 6xy + 13y^2$. Trouvez si cette forme quadratique est positive définie, négative définie, positive semi-définie, négative semi-définie ou indéfinie. Expliquez.
- Soit la forme quadratique $q(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, où a est un paramètre. Pour quelles valeurs de a est-ce que la forme quadratique est positive définie? Expliquez.

QUESTION 6: (15 points)

Calculez *toutes* les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2, & f(x, y) = x^2y^2, \\ f(x, y) = \ln x + \ln y, & f(x, y) = xy^2. \end{cases}$$

QUESTION 7: (10 points)

- Comment vérifie-t-on si une fonction d'une seule variable est strictement concave?
- Soit une fonction $f(x)$ qui est deux fois dérivable. Montrez que si la fonction $f(x)$ est positive pour tout x , ainsi que convexe, alors la fonction $g(x) = (f(x))^2$ est aussi positive et convexe
- Rappelez-vous le problème que nous avons fait ensemble en classe, où l'on arrivait à la conclusion que l'auteur d'un livre et son éditeur ne sont jamais d'accord sur le nombre de livres à vendre. Quelle est la raison fondamentale pour ce résultat général? *Je vous demande de me donner une réponse concise, basée sur de l'intuition. Je ne vous demande pas de calculer ou redémontrer quoi que ce soit! Au contraire, je veux que vous me donniez l'intuition essentielle...*