ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I **Automne 2016**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Étudiez la fonction

$$f_p(x) = x^p - p \ln x,$$

où le paramètre $p > 1$. Cela implique: *(i)* préciser le domaine de définition de f_p, *(ii)* calculer les dérivées première et seconde - et préciser leurs domaines de définition respectifs, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées première et seconde, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f_p et (iv) déterminer pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; et pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?
(v) Vérifiez que ni le point où l'extremum est atteint, ni la valeur de cet extremum ne dépendent de p. *Utilisez le tableau.*
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 2: (15 points)
Soit la fonction

$$g_p(x) = \ln(1 + x) - x + p.$$

Étudiez la fonction g_p. Cela implique: *(i)* préciser le domaine de définition de g_p, *(ii)* calculer les dérivées première et seconde - et préciser leurs domaines de définition respectifs, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées première et seconde, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction g_p, (iv) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?
(v) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? *Utilisez le tableau.*
(vi) Pour quelles valeurs de p cette fonction garde-t-elle un signe constant? Expliquez.
Faites bien attention de répondre à chaque question posée.

QUESTION 3: (15 points)
Pour chaque fonction, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.
a. $f(x) = x^2 - \ln x$; b. $f(x) = \ln(1 + x^2)$; c. $f(x) = \sqrt{x4 + 4}$; d. $f(x) = x^2 e^x + \frac{1}{x}$; e. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

QUESTION 4: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = 2 - \ln q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = cq, \quad c > 0.$$

a. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Quel est la profit π^* correspondant? Détaillez la méthode et vos calculs.
c. Est-ce que la quantité optimale q^*, le prix optimal p^*et le profit maximum π^* dépendent positivement ou négativement du paramètre c? Expliquez.

QUESTION 5: (15 points)
a. Quelle est la forme "développée" de la forme quadratique associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

b. Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} a + a^2 & b \\ b & c + c^2 \end{bmatrix}.$$

Si la forme quadratique associée à la matrice A est positive semi-définie, est-ce que la forme quadratique associée à la matrice B l'est aussi? Expliquez.
c. Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & p & 1 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculez le déterminant de la matrice AB.

QUESTION 6: (15 points)
Calculez *toutes* les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 + y, & f(x,y) = x^2 \ln y, \\ f(x,y) = e^{xy^2}, & f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}. \end{cases}$$

QUESTION 7: (10 points)
a. Comment vérifie-t-on si une fonction d'une seule variable est strictement concave?
b. Montrez que la somme de deux fonctions convexes est également une fonction convexe.
c. Donnez la définition d'une fonction de plusieurs variables additivement séparable.