a) $\max_{h_t, k_t} \; f(h_t, k_t) K_t^{\gamma} - w_t h_t - r_t k_t$ $\quad$ K_t donné

$[h_t]$ $\quad f_1(h_t, k_t) K_t^{\gamma} = w_t$

$[k_t]$ $\quad f_2(h_t, k_t) K_t^{\gamma} = r_t$

b) $\begin{cases} \text{contrôle: } k_{t+1}, h_t \\ \text{état: } k_t \end{cases}$

c) $$V(k_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \left\{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V(k_{t+1}) \right\}$$

$$\text{t.q. } c_t + k_{t+1} = w_t h_t + r_t k_t$$

$[k_{t+1}]$ $\quad u_1(c_t, 1-h_t) = \beta V'(k_{t+1})$

$V'(k_t) = r_t u'(c_t, 1-h_t)$

$$\Longrightarrow u_1(c_t, 1-h_t) = \beta r_{t+1} u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1})$$

$[h_t]$ $\quad w_t u_1(c_t, 1-h_t) = u_2(c_t, 1-h_t)$

- Choix efficace de l'investissement sur 2 périodes consécutives.
- Tradeoff efficace consommation/loisir.

d) A l'équilibre : marchés équilibrés $\rightarrow \left.\begin{array}{l} k^d = k^s \\ h^d = h^s \end{array}\right\}$

$\rightarrow$ À l'équilibre seulement :

$\left[\begin{array}{l}\text{cohérence entre le capital agrégé} \\ \text{et les décisions individuelles.} \\ \qquad\qquad k = K \;.\end{array}\right.$

$\rightarrow$ regroupant tout :

$$\begin{cases} c_t + k_{t+1} = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\gamma} \\[2mm] \dfrac{1}{c_t} = \beta \dfrac{1}{c_{t+1}} (1-\alpha)\, h_t^{\alpha} k_t^{\gamma-\alpha} \\[2mm] \alpha\, h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\gamma} \dfrac{1}{c_t} = \dfrac{A}{1-h_t} \end{cases}$$

e) $V(k_t) = \max\limits_{k_{t+1}, h_t} \left\{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V(k_{t+1}) \right\}$

s.q. $c_t + k_{t+1} = f(k_t, h_t) k_t^{\gamma} = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\gamma}$

$\rightarrow$ Le planificateur internalise l'externalité dès le départ.

$[k_{t+1}]$ $\quad -u_1(c_t, 1-h_t) + \beta V'(k_{t+1}) = 0$

$V'(k_t) = u'(c_t)\,((1-\alpha+\gamma)\, h_t^{\alpha} k_t^{\gamma-\alpha})$

$$\Rightarrow u_1(c_t, 1-h_t) = \beta u'(c_{t+1}, 1-h_{t+1})\,((1-\alpha+\gamma)\, h_{t+1}^{\alpha} k_{t+1}^{\gamma-\alpha})$$

$[h_t]$ $\quad \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\gamma}\, u_1(c_t, 1-h_t) = u_2(c_t, 1-h_t)$

f) <u>Equilibre</u>

$$\begin{cases} c + k = h^{\alpha} k^{1-\alpha+\gamma} \\ 1 = \beta(1-\alpha)\, h^{\alpha} k^{\gamma-\alpha} \\ \alpha h^{\alpha-1} k^{1-\alpha+\gamma} \dfrac{1}{c} = \dfrac{A}{1-h} \end{cases}$$

<u>Optimal</u>

$$\begin{cases} c + k = h^{\alpha} k^{1-\alpha+\gamma} \\ 1 = \beta(1-\alpha+\gamma)\, h^{\alpha} k^{\gamma-\alpha} \\ \alpha h^{\alpha-1} k^{1-\alpha+\gamma} \dfrac{1}{c} = \dfrac{A}{1-h} \end{cases}$$

Pareil, seulement quand $\gamma = 0$ [pas d'externalité].

PROBLÈME OPTIMAL

a) Etat : $\begin{cases} k_t \\ I_t \in \{A, B\} : \text{identité du parti au pouvoir.} \end{cases}$

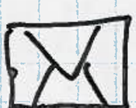
Contrôle : k_{t+1}

h_t (trivial) $\rightarrow h_t = \bar{h}, \forall t$

$$V(k_t, I_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \left\{ u(c_t) + \beta E_{I_{t+1}} \left[V(k_{t+1}, I_{t+1}) \mid I_t \right] \right\}$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} + g_{I_t} = f(\bar{h}, k_t)$$

$[k_{t+1}]$ $\quad -u'(c_t) + \beta E_{I_{t+1}} \left[V_1(k_{t+1}, I_{t+1}) \mid I_t \right] = 0$



$$V_1(k_t, I_t) = u'(c_t) f_2(\bar{h}, k_t)$$

$$\Longrightarrow \quad u'(c_t) = \beta E_{I_{t+1}} \left[u'(c_{t+1}) f_2(\bar{h}, k_{t+1}) \right]$$

b) $\quad UM_C = UM_{Inv.}$

c) Les règles de décision $c_t = \hat{c}(k_t, I_t)$ et $k_{t+1} = \hat{k}(k_t, I_t)$

pouvant s'écrire comme $c_t = \hat{c}_A(k_t)$ si $I_t = A$,

$c_t = \hat{c}_B(k_t)$ si $I_t = B$.

Même chose pour l'investissement $\rightarrow \left.\begin{matrix} \hat{k}_A(k_t) \\ \hat{k}_B(k_t) \end{matrix}\right|$

C'est parce que la variable d'état I_t est binaire.

---

si $I_t = A$

$$u'(\hat{c}_A(k_t)) = \beta \left\{ \begin{aligned} &\lambda_A\, u'\left[\hat{c}_A(\hat{k}_A(k_t))\right] f_2(\bar{h}, \hat{k}_A(k_t)) \\ &+ (1-\lambda_A)\, u'\left[\hat{c}_B(\hat{k}_A(k_t))\right] f_2(\bar{h}, \hat{k}_A(k_t)) \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{c}_A(k_t) + \hat{k}_A(k_t) + g_A = f(\bar{h}, k_t)$$

Si $I_t = B$

$$u'(\hat{c}_B(k_t)) = \beta \left\{ \begin{aligned} &\lambda_B\, u'\left[\hat{c}_B(\hat{k}_B(k_t))\right] f_2(\bar{h}, \hat{k}_B(k_t)) \\ &+ (1-\lambda_B)\, u'\left[\hat{c}_A(\hat{k}_B(k_t))\right] f_2(h, \hat{k}_B(k_t)) \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{c}_B(k_t) + \hat{k}_B(k_t) + g_B = f(\bar{h}, k_t)$$

d) On voit que, $\forall I_t$, le rendement du capital peut sortir du calcul du terme d'espérance, d'où le résultat.
[car résulte d'une décision prise à t.]

PROBLÈME D'ÉQUILIBRE :

e) Mêmes états et contrôles

$$V(k_t, I_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \left\{ u(c_t) + \beta E_{I_{t+1}}\left[V(k_{t+1}, I_{t+1}) | I_t\right] \right\}$$

$$\text{t.q. } c_t + k_{t+1} = w_t \bar{h} + r_t k_t + T_t$$

$[k_{t+1}]$ même

 $V_1(k_t, I_t) = r_t u'(c_t)$

$$\rightarrow u'(c_t) = \beta E_{I_{t+1}}\left[u'(c_{t+1}) r_{t+1}\right]$$

f) $\max_{h_t, k_t} f(h_t, k_t) - w_t h_t - r_t k_t$

$[h_t]$ $f_1(h_t, k_t) = w_t$

$[k_t]$ $f_2(h_t, k_t) = r_t$

g) Equilibre :

CPO (ménage + firme) : $u'(c_t) = \beta E_{I_{t+1}} \left[u'(c_{t+1}) f_2(h_{t}, k_t) \right]$

Équilibrage des marchés : $h_t = \bar{h}$, $k_t^s = k_t^d$

Budget équilibré : $T_t = g_{I_t}$
gvt

1/

a) $$\Pi(s_t) = \max_{n_t, k_t} \left\{ s_t n_t^{\alpha} k_t^{\beta} - w_t n_t - r_t k_t + \frac{1-\lambda}{1+\rho} E\left(\Pi(s_{t+1}) | s_t\right) \right\}$$

b) Le problème reste statique puisqu'il n'y a pas de coûts d'ajustement.

$[n_t] \quad s_t f_1(n_t, k_t) = w_t \quad \rightarrow N^d(s_t; w_t, r_t)$

$[k_t] \quad s_t f_2(n_t, k_t) = r_t \quad \rightarrow K^d(s_t; w_t, r_t)$

c) $\tilde{\Pi}(s_t) = f[N^d(s_t), K^d(s_t)] - w_t N^d(s_t) - r_t K^d(s_t) = (1-\alpha-\beta) s_t N^d(s_t)^{\alpha} K^d(s_t)^{\beta}$
$\rightarrow$ fonction de (w_t, s_t) ... et de r_t.

d) Le ratio $\frac{K^d(s_t)}{N^d(s_t)}$ est donné par le ratio des CPOs.

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha (N^d)^{\alpha-1} (K^d)^{\beta}}{\beta (N^d)^{\alpha} (K^d)^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K^d(s_t)}{N^d(s_t)} \Rightarrow \frac{K^d(s_t)}{N^d(s_t)} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{w}{r}.$$

e) $\forall i, \quad \underbrace{\Pi(s_i)}_{=\Pi_i} = \tilde{\Pi}(s_i) + \frac{1-\lambda}{1+\rho} \sum_{j=1}^{N} \Omega_{ij} \underbrace{\Pi(s_j)}_{\Pi_j}$

Système linéaire en $\Pi(s_i) \rightarrow$ résolvable (conditionnellement à w_t, r_t)

Par définition, $V_e = \sum_{j=1}^{m} \nu(s_j)\, \Pi(s_j) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j \Pi_j$.

En valeur nette : $V_e(w_t, r_t) - c_e$.

$\rightarrow$ Libre entrée $V_e(w_t, r_t) = c_e$

f) Soit $\mu(s)$ cette distribution stationnaire.

(À chaque s, correspond une taille unique.)

Egalité des flux : $\mu(s_i) = (1-\lambda)\left[\sum_j \Omega_{ji}\, \mu(s_j) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{facteur d'échelle} \\ = \#\text{ d'entrants}}}{M}\, \nu(s_i)\right]$

$\rightarrow$ Résolvable comme système linéaire, conditionnellement à M.

$\rightarrow$ on trouve $\{\hat{\mu}(s_i)\}$ pour $M = 1$.

g) $N_T^d / M = \sum_j (\hat{\mu}_j + \nu_j)\, N^d(s_j)$

$\Pi_T / M = \sum_j (\hat{\mu}_j + \nu_j)\, \tilde{\pi}_j - c_e$

$X / M = \sum_j (\hat{\mu}_j + \nu_j)\, s_j\, f(N(s_j), K(s_j))$

h) $V(k_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \ln c_t - A h_t + \beta V(k_{t+1})$

t.q. $c_t + k_{t+1} = w_t h_t + r_t k_t + \Pi_t$

$[k_{t+1}]$ $\quad -\frac{1}{c_t} + \beta V'(k_{t+1}) = 0$

$V'(k_t) = \frac{1}{c_t} r_t$

$\longrightarrow \frac{1}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}} r_{t+1}$

$[h_t]$ $\quad \frac{1}{c_t} w_t = A$

i) Etat stationnaire $\longrightarrow$ Toutes les valeurs agrégées fixes, donc prix des facteurs fixes (w^*, r^*)

De (h) $\longrightarrow 1 = \beta r^*$ $\longrightarrow$ Utilise libre entrée pour trouver w^*.

Donc, obtient c^* $\left(\frac{w^*}{c^*} = A\right)$

Equilibrage des marchés : $c^* + M c_e = X_T$

$\longrightarrow c^* + M c_e = M\left(\frac{X_T}{M}\right)$

$\longrightarrow$ On en déduit M.

j) Pour justifier l'entrée coûteuse des firmes, il faut qu'elle fasse du profit $\longrightarrow \alpha + \beta < 1$.