ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I - Examen final **Automne 2016**
Professeur: Alain Delacroix

ATTENTION: Dans tout l'examen, chercher les extrema d'une fonction veut dire: "Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.".

Question 1 (15 points):
a. Vérifiez que la fonction $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + 4} - x$ n'a pas d'extremum. Vérifiez que $f(x, y) = yg(x) - h(x)$ n'a pas d'extremum si $g(x)$ est toujours strictement positif (ou toujours strictement négatif). Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels des fonctions

$$\begin{cases} f(x, y) = \ln(xy) - \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}, \\ g(x, y) = \ln(x^2y^2) - \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}, \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta > 0. \end{cases}$$

c. Si ces deux fonctions ont chacune un extremum (!), est-ce que cet extremum est atteint au même point stationnaire? Est-ce que la valeur de cet extremum est la même pour les deux fonctions? Expliquez.

Question 2 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = e^{x^2} + y - \ln y.$$

Montrez que pour tout (x, y) dans le domaine de définition de la fonction, $f(x, y) > 1$. Expliquez tout.

Question 3 (15 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = xy^2 + \frac{x^2}{2} - x.$$

a. Cherchez les extrema de cette fonction. Expliquez.
b. Soit la fonction

$$f(x, y) = x^p y^q - xy,$$

où (p, q) sont des paramètres quelconques. De plus, nous restreignons notre analyse au cas où $x > 0$ et $y > 0$. Vérifiez que cette fonction n'a pas d'extremum quand $p \neq q$.

Question 4 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

où (a, b, c) sont a priori des paramètres quelconques.
a. Exprimez la condition de premier ordre afin de trouver une condition nécessaire sur les coefficients (a, b, c) pour que la fonction f ait un/des point(s) stationnaire(s). Expliquez.

b. Quelles sont les conditions sur (a, b, c) pour un maximum? Quelles sont les conditions sur (a, b, c) pour un minimum? Ceux-ci sont-ils locaux ou globaux? Expliquez.
c. Quand les conditions sont remplies pour un maximum, quelle est la valeur de ce maximum? Quand les conditions sont remplies pour un minimum, quelle est la valeur de ce minimum?
d. Peut-on avoir un extremum quand a ou c égale zéro? Expliquez.

Question 5 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y,z} x - x^2 + 5y - y^2 - z^2 \quad t.q. \quad x + y + z = \frac{3}{2}.$$

a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)$. Expliquez.
b. Vérifiez que les conditions de second ordre sont satisfaites. Expliquez.
c. Quelle valeur la fonction atteint-elle au point stationnaire?

Question 6 (15 points):
a. On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} e^{-x} + e^{-x-y} \quad t.q. \quad x + y = p.$$

Essayez de trouver le minimum de cette fonction sous la contrainte ci-dessus.
b. On pose maintenant le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} e^{-x} + e^{-x-y} + x^2 + x \quad t.q. \quad x + y = p.$$

b1. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*, λ^*) en fonction de p. Expliquez.
b2. Utilisez les conditions de second ordre pour vérifier que (x^*, y^*, λ^*) est la solution du problème.
b3. Vérifiez que quelque soit $p \in \mathbb{R}$, le minimum m_p est strictement supérieur à 1.

Question 7 (20 points):
a. On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \frac{1}{2} - x^2 - y^2 \quad t.q. \quad x + y = 1.$$

Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Est-ce que les conditions de second ordre pour un maximum sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur M^* de la fonction au point stationnaire?
b. Le problème est maintenant:

$$\max_{x,y} \frac{1}{2} - x^2 - y^2 \quad t.q. \quad x + y = T,$$

où T est un paramètre.
Comme en (7a), cherchez le point stationnaire et vérifiez les conditions de second ordre. Exprimez le maximum M^* en fonction de T. Calculez la dérivée $\frac{dM^*}{dT}$. Quel résultat théorique vu en classe pouvons-nous ainsi vérifier?