Introduction à l'algèbre linéaire

Décembre 2016

Algèbre linéaire: matrices et déterminants

- Les chapitres "Algèbre linéaire" et "Formes quadratiques" introduisent des notions dont nous allons avoir besoin pour le chapitre "Fonctions de n variables".

- Dans le présent chapitre, nous allons considérer les notions de matrices et de déterminants.

Vecteurs (1)

- Un vecteur *de dimension* n est constitué de n nombre réels.

- Un vecteur *colonne* $\mathbf{v}$ de dimension $n \times 1$ se présente comme

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1} .$$

  Il est composé de n rangées et 1 colonne.

- Un vecteur *rangée* $\mathbf{w}$ de dimension $1 \times n$ se présente comme

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{1 \times n} .$$

  Il est composé de 1 rangée et n colonnes.

Vecteurs (2)

- La *transposition* transforme un vecteur colonne en un vecteur rangée (et vice versa):

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}_{1\times n} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n\times 1} .$$

Matrices (1)

- Définition: Une matrice est composée de nombre réels, arrangés en ordre particulier.
- Exprimons la matrice A comme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

- La matrice A a m rangées et n colonnes. Dimension: $m \times n$.
- On la dénote $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.
- Une matrice de dim $n \times n$ est une matrice *carrée (ordre n)*.

Matrices (2)

- *Remarque #1*:

  Un vecteur est un type particulier de matrices: l'une des dimensions est 1.

- *Remarque #2:*

  Pour que deux matrices A et B soient égales, il faut qu'elles le soient, élément par élément, i.e.:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \textbf{pour tout } (i, j).$$

En particulier, elles doivent être de même dimension.

Matrices (3)

- La matrice transposée de A est obtenue en inversant rangées et colonnes, passant d'une dim $m \times n$ à une dim $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Une matrice est *symétrique*, si elle est égale à sa transposée,

$$A = A^T.$$

Opération sur les matrices (1)

- Addition / soustraction - multiplication par un scalaire:

  Soit A et B deux matrices de même dimension $m \times n$. Soit λ un scalaire (réel).

$$\begin{cases} (\lambda A) = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}, \\ A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}, \\ A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}. \end{cases}$$

- Essentiellement, les opérations se font élément par élément.

Opération sur les matrices (2)

- Multiplication de matrices:

  Soit deux matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{n\times p}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

- Comme A et B n'ont plus forcément les mêmes dimensions, on ne peut multiplier élément par élément...

Opération sur les matrices (3)

- Le produit $C = AB$ est une matrice de dimension $m \times p$.

- L'élément c_{ij} ($i^{ème}$ rangée, $j^{ème}$ colonne de C) est le produit élément par élément de la $i^{ème}$ rangée de A par la $j^{ème}$ colonne de B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... \cdots ... + a_{in}b_{nj}.$$

- De façon plus compacte,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Opération sur les matrices (4)

- Par exemple,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Opération sur les matrices (5)

- *Remarque #1:*

  Pour pouvoir multiplier les matrices A et B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de rangées de B.

- *Remarque #2:*

  En général, $AB \neq BA$.

Déterminant d'une matrice carrée (1)

- Soit une matrice carrée d'ordre 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

- Le déterminant de A est

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Il est obtenu (i) en multipliant les deux termes de la diagonale principale entre eux $(a_{11}a_{22})$, puis (ii) en multipliant les deux termes de la diagonale opposée entre eux $(a_{21}a_{12})$, enfin (iii) en soustrayant le deuxième produit du premier.

Déterminant d'une matrice carrée (2)

- Soit A un matrice carrée d'ordre n.

- Définition: Le mineur M_{ij} de la matrice A est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i^{ème}$ rangée et la $j^{ème}$ colonne de A.

- Définition: Le cofacteur C_{ij} de la matrice A est obtenu à partir du mineur M_{ij}:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

- *Remarque:* Si $(i+j)$ est pair, alors $C_{ij} = M_{ij}$, tandis que si $(i+j)$ est impair, alors $C_{ij} = -M_{ij}$.

Déterminant d'une matrice carrée (3)

- <u>Théorème:</u> Soit A une matrice carrée d'ordre n et C_{ij} ses cofacteurs. Alors,

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \text{ pour tout } i, \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \text{ pour tout } j. \end{aligned}$$

- On peut calculer $|A|$:
  - en choisissant une ligne (i), en multipliant élément et cofacteur correspondant sur toute la ligne, puis en sommant le tout.
  - en faisant la même chose, à partir d'une colonne (j).
  - quelle que soit la méthode, le résultat est le même...

Méthode alternative pour le calcul d'un déterminant.

* La méthode évite de passer par les cofacteurs:

1) Placer signe +/− au-dessus des éléments de A, en alternant de signe, mais avec signe (+) en 1ère position

$$A = \begin{bmatrix} 1^{+} & 2^{-} & 1^{+} \\ 3^{-} & 4^{+} & -3^{-} \\ 5^{+} & -6^{-} & 7^{+} \end{bmatrix}$$

2) Choisir une ligne (ou 1 colonne) et multiplier élément et <u>mineur</u> sur toute la ligne, <u>en utilisant les signes alternés.</u>

Ex. #1 Avec la 1ère ligne,

$$|A| = +(1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -100$$

Ex. #2 Avec la 2ème colonne,

$$|A| = -(2)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -100$$

Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - Vecteurs/matrices et tranposées,
  - Multiplication de matrices,
  - Mineurs / cofacteurs,
  - Déterminants.

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- Déterminant d'une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \implies |A| = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Le déterminant d'une matrice diagonale égale le produit des termes de sa diagonale.

- Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{bmatrix}.$$

Alors, $|B| = \lambda\mu|A|$. Ce résultat peut être utilisé pour simplifier certains calculs.

Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{bmatrix}.$$

Alors, $|A| = 0$. Le déterminant d'une matrice comprenant des lignes (ou des colonnes) proportionnelles est toujours nul.

- Soit une matrice A:

$$|A| = |A^T|.$$

Une matrice a le même déterminant que sa transposée.

Appendice B: Exercices pratiques

- Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculez:
  - ses mineurs,
  - ses cofacteurs,
  - son déterminant (de deux façons différentes),
  - combien y a-t-il de façons de calculer $|A|$?
  - certaines sont-elles plus faciles?