# Formes quadratiques

Décembre 2016

# Formes quadratiques (1)

- Les formes quadratiques vont être très utiles quand nous étudierons et optimiserons les fonctions de plusieurs variables.

- En attendant, nous devons développer certaines notions.

# Formes quadratiques (2)

- Soit $\mathbf{x}$ un vecteur (colonne) de dimension $n \times 1$ et $A$ un matrice carrée d'ordre $n$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad .$$

- Définition: La forme quadratique **associée à la matrice** $A$ est la fonction

$$q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

# Formes quadratiques (3)

- *Remarque*: La forme quadratique $q_A(\mathbf{x})$ est un scalaire:

$$\underbrace{q_A(\mathbf{x})}_{1\times 1} = \underbrace{\mathbf{x}^T}_{1\times n} \underbrace{A}_{n\times n} \underbrace{\mathbf{x}}_{n\times 1}.$$

- *Remarque*: Après développement, tous les termes de la forme quadratique sont de degré 2:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad q_A(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$

Cela est vrai quel que soit la dimension de $A$ (voir appendice A). C'est pourquoi on parle de forme *quadratique*.

# Formes quadratiques (4)

- On peut passer d'une matrice $A$ donnée à la forme quadratique associée $q_A(\mathbf{x})$ comme ci-dessus.

- On peut aussi passer d'une forme quadratique donnée $q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ à sa "forme matricielle" en choisissant la matrice $A$ judicieusement:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad q_A(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

- Remarquez que la forme quadratique peut-être associée à plusieurs matrices, tant que la somme des termes sur la diagonale opposée reste égale à $b$. Il est habituel de représenter la forme quadratique par une matrice symétrique.

# Type de formes quadratiques

- <u>Définitions:</u> Soit la forme quadratique (FQ) $q_A(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

  - la FQ et $A$ sont définies positives si $q_A(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
  - la FQ et $A$ sont définies négatives si $q_A(\mathbf{x}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

  - la FQ et $A$ sont semi-définies positives si $q_A(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{x}$.
  - la FQ et $A$ sont semi-définies négatives si $q_A(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x}$.

  - Dans tout autre cas, la FQ et $A$ sont indéfinies.

# Caractérisation des formes quadratiques (1)

- Nous cherchons une façon simple de déterminer le type de la FQ.

- Définitions: Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $1 \leq k \leq n$.
  - la sous-matrice principale primaire d'ordre $k$ de $A$ est la sous-matrice obtenue en ne gardant que les $k$ *premières* rangées et colonnes de $A$.
  - c'est donc une matrice carrée d'ordre $k$.
  - son déterminant est le mineur principal primaire d'ordre $k$ de $A$, dénoté $mpp_k$.

# Caractérisation des formes quadratiques (2)

- La FQ et la matrice $A$ sont **définies positives** si et seulement si **tous les mineurs principaux primaires sont strictement positifs**, i.e.

$$mpp_1 > 0, \quad mpp_2 > 0, \quad mpp_3 > 0, \quad mpp_4 > 0 \ldots$$

- La FQ et la matrice $A$ sont **définies négatives** si et seulement si **tous les mineurs principaux primaires alternent en signe, comme suit**:

$$mpp_1 < 0, \quad mpp_2 > 0, \quad mpp_3 < 0, \quad mpp_4 > 0 \ldots$$

# Caractérisation des formes quadratiques (3)

- *Remarque #1*: Les conditions ci-dessus doivent être satisfaites par <u>**tous**</u> les *mpp*'s, quel que soit leur ordre.

- Remarque #2: Les conditions requièrent des inégalités *strictes* (et pas $\leq$ ou $\geq$).

- *Remarque #3*: Des conditions similaires (plus compliquées) existent pour déterminer si une FQ est *semi-définie positive* ou *négative*. Nous ne les considérons pas, mais elles se trouvent en appendice A.

# Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - Forme quadratique.
  - FQ, versions matricielle et développée.
  - FQ définie (semi-définie) positive ou négative.
  - Caractérisation d'une FQ.

# Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- Dans le cas $n = 3$, la version développée de la FQ ne contient que des termes de degré 2.

  Soit $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ et $q_A(\mathbf{x})$ sa forme quadratique associée. Alors,

$$q_A(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3.$$

- Plus généralement,

$$q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

# Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- Soit une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nous avons précédemment vu que le déterminant d'une telle matrice égale le produit des termes de sa diagonale.

- Nous en déduisons:

$$\begin{cases} A \text{ est définie positive si et seulement si tous les } a_{ii} > 0, \\ A \text{ est définie négative si et seulement si tous les } a_{ii} < 0. \end{cases}$$

# Appendice A: Quelques résultats “classiques”

*Caractérisation de FQ semi-définies:*

- Définitions:
  - une sous-matrice principale d'ordre $k$ $(1 \leq k \leq n)$ de $A$ est une sous-matrice obtenue en retirant $n-k$ rangées et colonnes correspondantes de $A$. *Attention: il y a plus qu'une sous-matrice principale d'ordre k...*
  - leurs déterminants sont les mineurs principaux d'ordre $k$, dénotés $mp_k$.

# Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- La FQ et la matrice $A$ sont semi-définies positives si et seulement si tous les mineurs principaux sont positifs ou nuls, i.e.

$$mp_1 \geq 0, \quad mp_2 \geq 0, \quad mp_3 \geq 0, \quad mp_4 > 0 \ \ldots$$

*(rappelez-vous qu'il y a plusieurs $mp_1$'s, plusieurs $mp_2$'s...)*

- La FQ et la matrice $A$ sont semi-définies négatives si et seulement si tous les mineurs principaux alternent en signe, comme suit:

$$mp_1 \leq 0, \quad mp_2 \geq 0, \quad mp_3 \leq 0, \quad mp_4 \geq 0 \ \ldots$$

# Appendice B: Exercices pratiques

- Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. Exprimez les FQ associées, en version développée.
2. Caractérisez leur type.