Optimisation sous contraintes d'égalité

Décembre 2016

Optimisation sous contraintes d'égalité (1)

- Dans de nombreuses situations économiques, il faut tenir compte d'un budget ou d'un temps disponible...

- Dans ces cas, on ne peut choisir les variables indépendamment les unes des autres, car le choix doit respecter le budget ou le temps à disposition.
  - l'optimisation n'est plus libre, mais **sous contraintes** de budget ou de temps.

Optimisation sous contraintes d'égalité (2)

- On peut concevoir des problèmes
  - sous contraintes d'égalité,
  - sous contraintes d'inégalité.

- Nous traitons ici de problèmes d'optimisation *sous contraintes d'égalité*, en utilisant la **méthode de Lagrange**.

Exemples (1)

- **Maximisation d'utilité sous contrainte budgétaire:**

  Un ménage doit choisir la consommation de biens $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, quand les prix sont (p_a, p_b) et le revenu R.

$$\max_{c_a, c_b} u(c_a, c_b) \quad t.q. \quad p_a c_a + p_b c_b = R.$$

Exemples (2)

- **Allocation optimale du temps:**

  Une étudiante dispose de 60 heures et doit allouer son temps entre la révision de deux cours (t_1, t_2). Son objectif est la moyenne sur les deux notes, étant donné qu'en passant t_i heures sur le cours i, elle obtiendra la note $N_i(t_i)$.

$$\max_{t_1, t_2} \frac{N_1(t_1) + N_2(t_2)}{2} \quad t.q. \quad t_1 + t_2 = 60.$$

Deux variables - une contrainte (1)

- Nous commençons par la maximisation d'une fonction de *deux* variables, sujette à *une seule* contrainte.
- Nous allons montrer comment "transformer" le problème par la **méthode de Lagrange** en un problème d'optimisation libre (que nous savons donc résoudre).
- Nous généraliserons par la suite à la maximisation d'une fonction à n variables et m contraintes, où $n > m$.

Deux variables - une contrainte (2)

- S'il y a deux variables et une contrainte, le problème peut s'écrire

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) \quad t.q. \quad g(x_1,x_2) = 0.$$

- Nous appelons la fonction f "*l'objectif*".

- Nous appelons la fonction g "*la contrainte*".

  Remarquez que la contrainte s'écrit sous la forme $g(x_1,x_2) = 0$.

Courbes de niveau et point de tangence

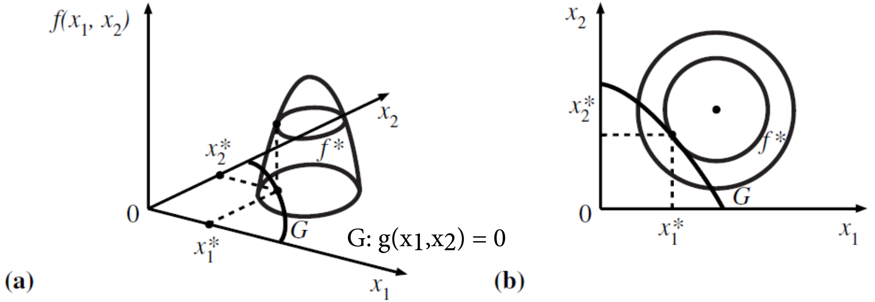


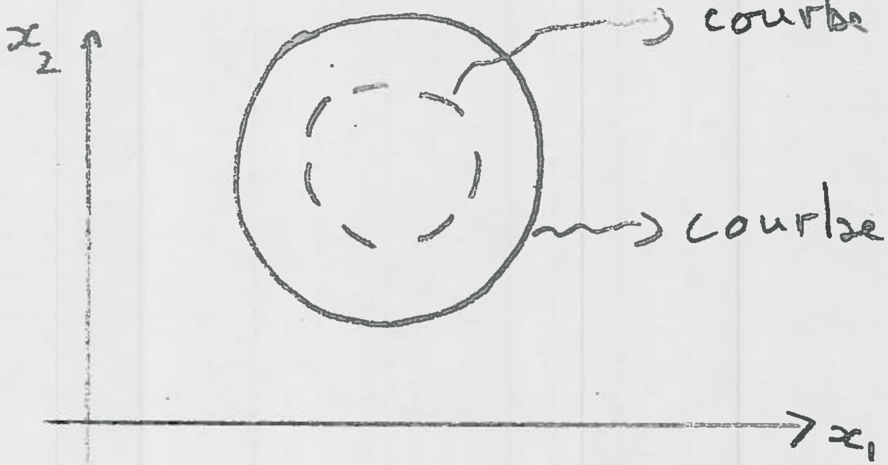
Figure 13.1 Finding the point on the constraint curve that gives the highest function value

Chaque graphe représente la contrainte (G) et une courbe de niveau (f^*).

- Une courbe de niveau de la Fonction f représente l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que $f(x_1, x_2) = \bar{f}$.

  → section de l'enveloppe à un niveau $\bar{f}$ donné.

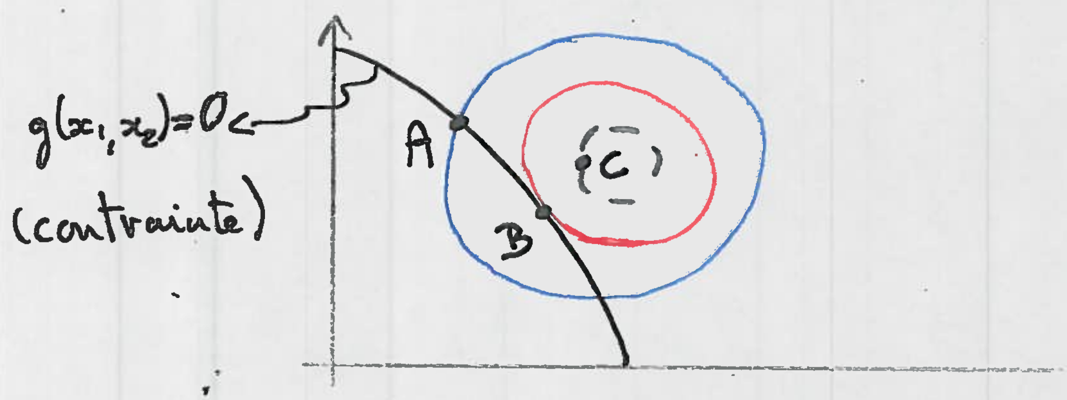
- Sur le graphe, les courbes de niveau sont les courbes refermées sur elles-mêmes.



→ courbe de niveau $\bar{f}_2 > \bar{f}_1$.

→ courbe de niveau $f(x_1, x_2) = \bar{f}_1$.

- Considérons plusieurs courbes de niveau, ainsi que la contrainte $g(x_1, x_2) = 0$, elle-même une courbe de niveau...



3 courbes de niveau de f.

$$\underbrace{f \text{ calculé en } A < f \text{ calculé en } B}_{\text{A et B satisfont la contrainte}} < \underbrace{f \text{ calculé en } C}_{\text{ne satisfait pas la contrainte}}.$$

Point optimal :
- sur la courbe de niveau la plus élevée,
- tout en satisfaisant la contrainte.

$\boxed{\text{Point de tangence entre les courbes de niveau.}}$

Deux variables - une contrainte (3)

- Graphiquement, le maximum est atteint quand les deux courbes de niveau sont tangentes, et donc leurs pentes égales.
- En appendice B, nous montrons que la pente de la tangente de la courbe de niveau de f est $(-f_1/f_2)$. De même, celle de la courbe de niveau de g est $(-g_1/g_2)$.
- Donc, au point de tangence, nous avons que

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}.$$

- Comme la solution doit respecter la contrainte, il faut aussi que

$$g(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

Deux variables - une contrainte (4)

- *Par intuition graphique*, nous venons de voir que la solution au problème de maximisation sous contrainte doit satisfaire le *système*

$$\begin{cases} \frac{f_1(x_1^*,x_2^*)}{f_2(x_1^*,x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*,x_2^*)}{g_2(x_1^*,x_2^*)}, & \textit{(tangence)} \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0. & \textit{(contrainte)} \end{cases}$$

- Nous développons maintenant la **méthode de Lagrange**, qui aboutit à la même conclusion, mais qui peut être généralisée à des problèmes à plus de variables et/ou de contraintes.

Méthode de Lagrange (1)

- Nous avons le problème suivant à résoudre:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \quad t.q. \quad g(x_1, x_2) = 0.$$

- Le **Lagrangien £** associé à ce problème est la **fonction** définie comme

$$£(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2).$$

- λ est le **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte.

Méthode de Lagrange (2)

- Donc, le Lagrangien prend la forme "objectif $+ \lambda \times$ contrainte".

- *Remarque:*

  Le Lagrangien est une fonction de *trois* variables: les deux variables (x_1, x_2) de la fonction objectif, plus le mutiplicateur (λ) associé à la contrainte.

Méthode de Lagrange (3)

- Qu'obtient-on si nous maximisons le Lagrangien?

$$\max_{x_1, x_2, \lambda} \pounds(x_1, x_2, \lambda).$$

- Les CPOs de ce problème d'optimisation libre sont

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0 & \quad CPO\ [x_1] \\ f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0 & \quad CPO\ [x_2] \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0 & \quad CPO\ [\lambda] \end{cases}$$

Méthode de Lagrange (4)

- En combinant les deux premières CPOs du Lagrangien, nous obtenons que

$$\lambda^* = -\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{g_1(x_1^*, x_2^*)} = -\frac{f_2(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}.$$

- Cela implique que

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}.$$

  On retrouve là la condition de *tangence*.

- La troisième CPO du Lagrangien assure que la *contrainte* est satisfaite.

Méthode de Lagrange (5)

- Nous en déduisons qu'un point stationnaire du Lagrangien *(problème transformé)* est aussi un candidat pour un maximum du problème de base, sous contrainte.
- Ainsi, pour trouver un maximum du problème de maximisation sous contrainte, nous pouvons à la place maximiser le Lagrangien, et en chercher les points stationnaires.
- Un problème de maximisation sous contrainte a été transformé en un problème de maximisation libre...

Méthode de Lagrange (6)

- *Remarque #1:*

  Comme toujours, on peut minimiser f sous contraintes, en maximisant $(-f)$ sous contraintes.

- *Remarque #2:*

  Trouver un point stationnaire du Lagrangien nous donne aussi le multiplicateur de Lagrange λ^*. Connaître ce dernier comporte un intérêt sur lequel nous reviendrons par la suite.

Méthode de Lagrange (7)

- *Remarque #3:*

  Comme toujours, résoudre une CPO est une condition *nécessaire* du problème, mais peut amener autre chose qu'un maximum.

  $\longrightarrow$ nous allons déterminer une condition *suffisante* (du second ordre) pour un maximum global sous contraintes.

Méthode de Lagrange générale (1)

- Mais commençons par généraliser la méthode de Lagrange.

- Soit le problème à n variables et m contraintes suivant:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \quad t.q. \quad \begin{cases} g^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ g^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}.$$

Méthode de Lagrange générale (2)

- À partir de ce problème, définissons le Lagrangien comme

$$\pounds(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^{(j)}(x_1,...,x_n).$$

- Le Lagrangien suit encore la forme "objectif $+ \lambda \times$ contraintes", mais il y a maintenant autant de multiplicateurs que de contraintes.

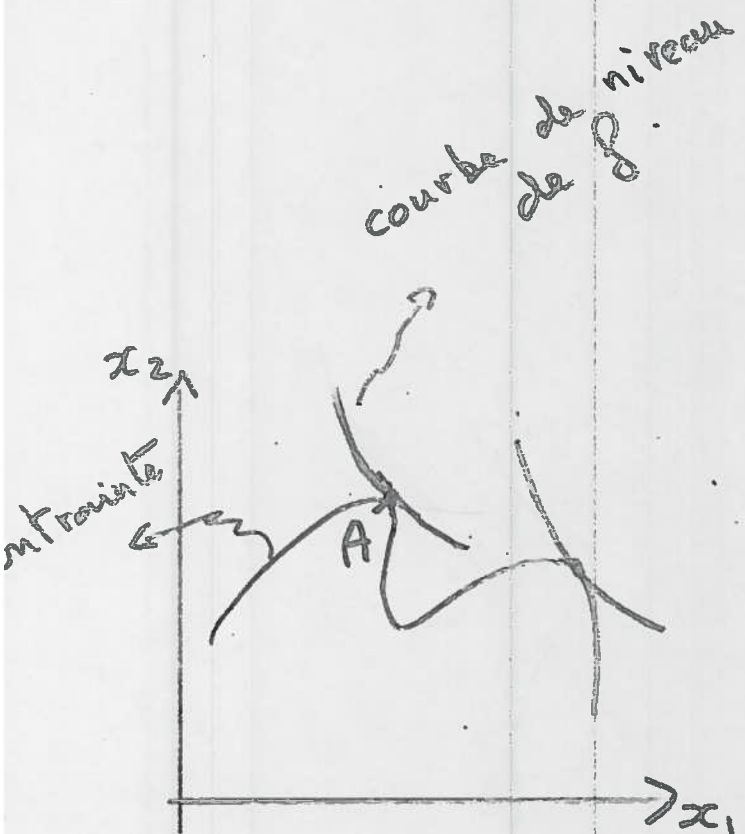
- La méthode consiste alors à maximiser le Lagrangien par rapport aux variables $(x_1,...,x_n)$ et aux multiplicateurs $(\lambda_1,...,\lambda_m)$, pour obtenir $m+n$ CPOs.

CSO pour un max global (1)

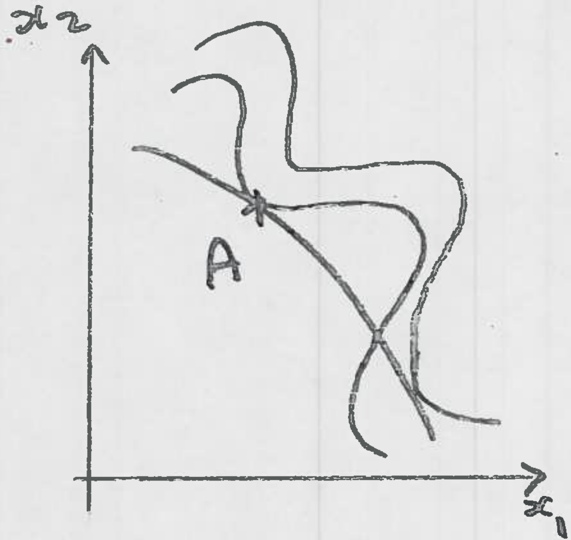
- Comme pour un problème de maximisation libre, on peut obtenir des conditions pour des extrema locaux ou globaux.

- Nous nous restreignons ici aux conditions pour un maximum global et commençons par une analyse graphique.

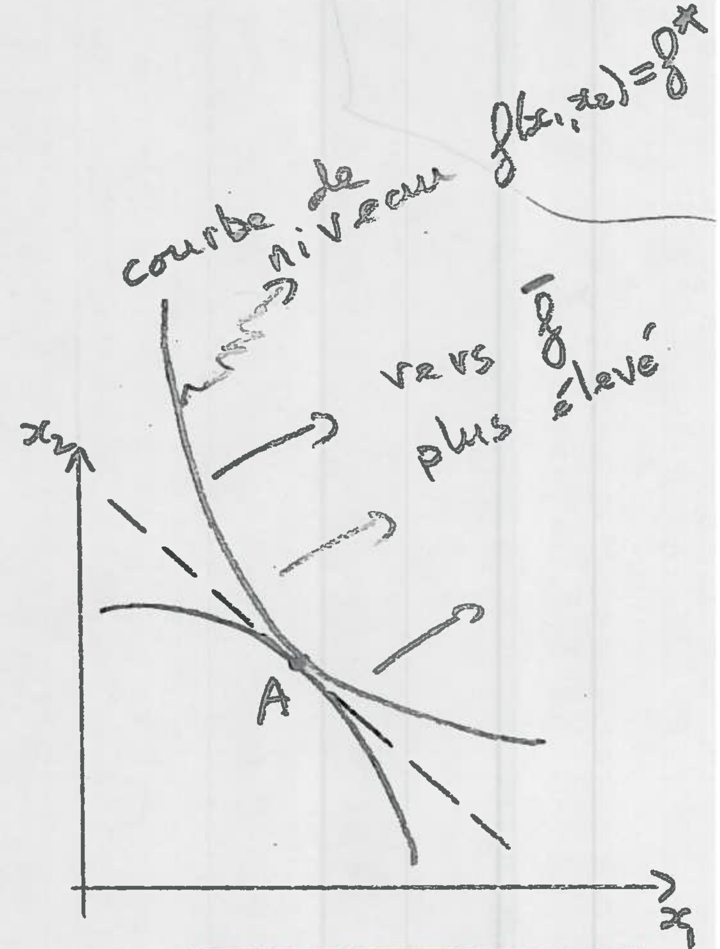
Plusieurs possibilités



A est un max local, pas un max global.



A est un max local, pas un max global.



A est un max global.

CSO pour un max global (2)

- Graphiquement, nous voyons qu'un maximum global sous contraintes est obtenu, quand la tangente "sépare" la région où $f(x_1, x_2) \geq f^*$ de la contrainte $g(x_1, x_2) = 0$.

- Cette intuition nous permet d'établir une paire de conditions suffisantes pour un maximum global.

CSO pour un max global (3)

- **Théorème #1:**

  Si, pour tout $\mathbf{x}$*,* f *est strictement concave et les fonctions* $g^{(i)}$ *convexes , alors le point stationnaire identifié par la méthode de Lagrange est un maximum global.*

  En particulier,

- **Théorème #2:**

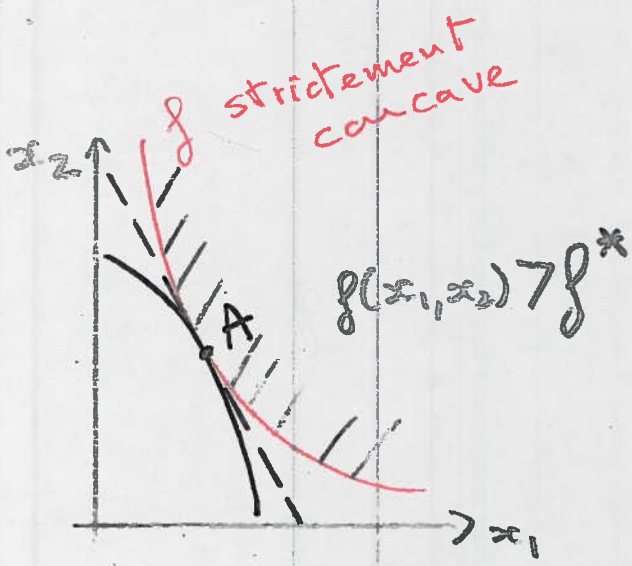
  Si, pour tout $\mathbf{x}$*,* f *est strictement concave et les fonctions* $g^{(i)}$ *linéaires, alors le point stationnaire identifié par la méthode de Lagrange est un maximum global.*

CSO pour un max global (4)

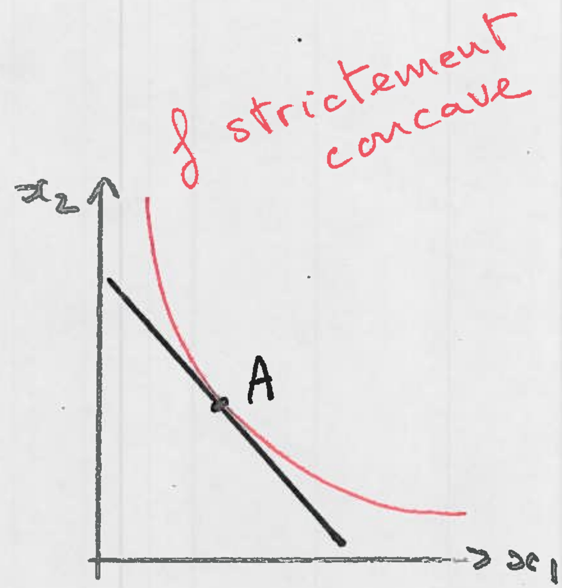
- **Remarque:**

  Dans nos applications économiques, les contraintes seront typiquement linéaires et Théorème #2 *(le plus simple à vérifier)* pourra s'appliquer.

CSO pour un max global



g convexe



g linéaire

Dans les deux cas, la tangente sépare les deux régions.

CPO + CSO pour un max

- Résumons:

$$\left\{\begin{array}{l} x^* \text{ pt stationnaire du Lagrangien,} \\ \text{objectif strictement concave,} \\ \text{contraintes convexes,} \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \text{max global en } x^*.$$

et *(<u>plus fréquemment</u>)*

$$\left\{\begin{array}{l} x^* \text{ pt stationnaire du Lagrangien,} \\ \text{objectif strictement concave,} \\ \text{contraintes linéaires,} \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \text{max global en } x^*.$$

Théorème de l'enveloppe (1)

- Il nous reste à interpréter le multiplicateur de Lagrange λ^*.

- Nous réécrivons le problème de base comme

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1, x_2) \quad t.q. \quad c - h(x_1, x_2) = 0.$$

(Remarquez la réécriture de la contrainte.)

- La contrainte $c - h(x_1, x_2) = 0$ peut être interprétée comme

$$\underbrace{c}_{\text{ressource}} = \underbrace{h(x_1, x_2)}_{\text{utilisation}}.$$

Théorème de l'enveloppe (2)

- Par exemple,

$$\begin{cases} R = p_a c_a + p_b c_b, & \textit{problème du consommateur} \\ T = t_1 + t_2, & \textit{allocation du temps} \end{cases}$$

- R et T sont les ressources, en termes de revenus ou de temps.

Théorème de l'enveloppe (3)

- Nous savons désormais résoudre ce type de problèmes et obtenir

$$\begin{cases} (x_1^*, x_2^*), & \textit{choix optimal} \\ \lambda^*, & \textit{multiplicateur de Lagrange} \\ f^* = f(x_1^*, x_2^*), & \textit{valeur de l'objectif maximisé} \end{cases}$$

- Il est naturel de se demander comment l'objectif f^* dépend de la ressource disponible c...
  - comment l'utilité dépend du revenu R,
  - comment la note dépend du temps passé à étudier T...

(toujours en supposant que les choix sont faits optimalement.)

Théorème de l'enveloppe (4)

- La réponse est donnée par le **théorème de l'enveloppe**:

$$\frac{df^*}{dc} = \lambda^*.$$

- Le théorème nous dit de combien l'objectif augmente quand la ressource augmente:

$$\frac{d(\text{objectif})}{d(\text{ressource})} = \text{multiplicateur}.$$

- Le théorème peut être généralisé au cas de n variables et m contraintes.

Récapitulatif

- **Notions importantes:**

  - Problèmes de maximisation sous contrainte d'égalité.
  - Approche graphique / courbes de niveau.
  - Méthode de Lagrange (CPO, CSO).
  - Théorème de l'enveloppe.

Appendice A: Problèmes économiques

- Problème du ménage:
  - condition marginale,
  - dual.
- Allocation du temps d'étude entre deux cours:
  - condition marginale,
  - théorème de l'enveloppe,
  - variation du temps total,
  - variation des poids.
- Allocation de l'effort entre deux examens d'un même cours:
  - condition marginale.

Appendice B: Complément mathématique

- Nous montrons ici que la pente de la tangente d'une courbe de niveau de la fonction $f(x)$ au point (x_1, x_2) est égale à $-f_1/f_2$.

- La courbe de niveau définit une relation implicite entre x_1 et x_2. Nous cherchons donc le ratio $\frac{dx_2}{dx_1}$ lorsque nous nous déplaçons le long de la courbe de niveau.

- Comment est-ce que $y = f(x_1, x_2)$ varie avec x_1 et x_2?:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2.$$

- Comme nous sommes placés sur une courbe de niveau de f, $f(x_1, x_2)$ est constant et $dy = 0$. Alors,

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0.$$

- Ainsi, la pente de cette courbe de niveau est $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$.

Appendice B: Complément mathématique

- Les deux théorèmes (CSO) pour garantir un maximum global requièrent que la fonction f soit strictement concave. La fonction Cobb-Douglas $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$, qui est fréquemment utilisée en économie, n'est pas strictement concave quand $\alpha + \beta = 1$, bien qu'elle le soit quand $\alpha + \beta < 1$.

- Malgré tout, nous avons un maximum global unique dans le "problème du ménage", car la fonction Cobb-Douglas est tout de même strictement *quasi-concave* quand $\alpha + \beta = 1$, et cela suffit pour garantir un maximum global unique...