ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I **Hiver 2017**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Étudiez la fonction

$$f_p(x) = (1+p^2)(x+e^{-x}) - 10, \quad \text{où } p \text{ est un paramètre réel.}$$

Cela implique: *(i)* préciser les domaines de définition de f_p, f_p' et f_p'', *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f_p, (iv) pour quelles valeurs de x la fonction est-elle croissante/décroissante?; pour quelles valeurs de x la fonction est-elle concave/convexe?,
(v) Cette fonction a-t-elle un extremum? De quel type (maximum ou minimum)? Local ou global? *Répondez à cette dernière question en utilisant le tableau. (vi)* Pour quelles valeurs du paramètre p est-ce que la fonction garde un signe constant sur l'ensemble de son domaine?

QUESTION 2: (15 points)
Calculez les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes:
a. $f(x) = x^{500} - 500x$; b. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$; c. $f(x) = xe^x - \ln x$; d. $f(x) = (\ln x)^2$; e. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

QUESTION 3: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = 1 - \alpha q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée et α un paramètre strictement positif. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = \beta q^2, \quad \text{où } \beta \text{ est un paramètre strictement positif.}$$

a. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Quel est le profit π^* correspondant? Détaillez vos calculs.
c. Est-ce que q^* croît ou décroît avec α? Avec β? Mêmes questions pour le prix p^*? Expliquez tout.

QUESTION 4: (15 points)
a. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 20$. Utilisez les conditions de premier et second ordre pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.
b. Soit la fonction $g_p(x) = \ln(1+x) - px$, où p est un paramètre donné. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.
c. Quelle est la condition sur le paramètre p pour assurer l'existence d'un extremum? Expliquez.

QUESTION 5: (15 points)
a. Utilisez les conditions de premier et second ordre pour trouver les extrema de la fonction $h(x) = e^x - x$. De quel type d'extremum s'agit-il? Y a-t-il une solution à l'équation $e^x = x$? Expliquez.
b. Utilisez les conditions de premier et second ordre pour montrer que la fonction $f(x) = e^x - e^{2x}$ a un extremum local. Minimum ou maximum? Quelle est la valeur de la fonction à ce point? Expliquez tout.

QUESTION 6: (15 points)
a. Calculez le déterminant $|A_p|$ de la matrice

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 \\ p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Si

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{calculez } |B| - |B^T|.$$

c. Pour quelle valeur du paramètre a est-ce que la forme quadratique associée à la matrice

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

est positive définie? Écrivez cette forme quadratique "sous forme développée" comme nous l'avons fait en classe. Expliquez tout.

QUESTION 7: (10 points)
a. Montrez que la somme de deux fonctions strictement croissantes ne peut ni avoir un maximum, ni un minimum. Expliquez.
b. Montrez que le produit de deux fonctions strictement croissantes et strictement positives ne peut ni avoir un maximum, ni un minimum. Expliquez.
c. Montrez qu'un polynôme d'ordre 2 $[P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0]$ a toujours un extremum global. Dans quel cas est-ce un maximum? Expliquez tout.