Final ECO 9015 – Aut. 2016

Solutionnaire

ξ

(I) 1) Firme $\max_{k_t} f(k_t) - r_t k_t$

CPO[k_t] $\quad f'(k_t) = r_t \quad \Rightarrow \Pi_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

2) Etat: k_t, w_t, ξ_t
Contrôle: $k_{t+1}, \tilde{h}_t, c_{Mt}, c_{Ht}$

$$V(k_t, w_t, \xi_t) = \max_{\substack{k_{t+1}, \tilde{h}_t \\ c_{Mt}, c_{Ht}}} \left\{ \ln(c_{Ht} + c_{Mt}) + \xi_t \ln(1-\tilde{h}_t) + \beta E_{w_t \xi_t}\left[V(k_{t+1}, w_{t+1}, \xi_{t+1})\right] \right\}$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_{Ht} = r_t k_t + \Pi_t \\ c_{Ht} = w_t \tilde{h}_t \end{cases}$$

Variables de contrôles "indépendantes": $k_{t+1}, \tilde{h}_t$

$$
\begin{cases}
[k_{t+1}] \quad -\dfrac{1}{c_{M_t}+c_{H_t}} + \beta\, E_{w_t,\xi_t}\left[V_1(k_{t+1}, w_{t+1}, \xi_{t+1}) \right] = 0 \\[2ex]
[\tilde{l}_t] \quad \dfrac{1}{c_{M_t}+c_{H_t}}\, w_t - \xi_t \dfrac{1}{1-l_t} = 0
\end{cases}
$$

$$V_1(k_t, w_t, \xi_t) = \frac{1}{c_{M_t}+c_{H_t}} (r_t + 1 - \delta)$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{1}{c_{M_t}+c_{H_t}} = \beta\, E_{w_t,\xi_t}\left[\dfrac{r_{t+1}+1-\delta}{c_{M_{t+1}}+c_{H_{t+1}}} \right] \\[3ex]
\dfrac{w_t}{c_{H_t}+c_{H_t}} = \dfrac{\xi_t}{1-l_t}
\end{cases}
$$

3) Conditions d'équilibre : $\begin{cases} \text{CPOs (ménage)} \\ \text{CPO (firme)} \\ \text{2 contraintes} \end{cases}$

4) Etat stationnaire:

CPOs (ménage) $\Longrightarrow$ $\beta(r^* + 1 - \delta) = 1$

$$\frac{\omega^*}{c_M^* + c_H^*} = \frac{\xi^*}{1 - \tilde{h}^*}$$

CPO (firm) $\Longrightarrow$ $r^* = \alpha (k^*)^{\alpha - 1}$

contraintes $\Longrightarrow$ $\delta k^* + c_M^* = \alpha (k^*)^\alpha + (1-\alpha)(k^*)^\alpha$

$\Rightarrow \delta k^* + c_M^* = (k^*)^\alpha$

$\Longrightarrow$ $\underline{c_H^* = \omega^* \tilde{h}^*}$

Si $\beta[\alpha + 1 - \delta] = 1 \Rightarrow \underline{r^* = \alpha} \Rightarrow \underline{k^* = 1}$

$\Rightarrow \underline{c_M^* = 1 - \delta}$

et $\dfrac{\omega^*}{1-\delta + \omega^* \tilde{h}^*} = \dfrac{\xi^*}{1 - \tilde{h}^*} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \underline{\tilde{h}^* = \dfrac{\omega^* - (1-\delta)\xi^*}{1 + \xi^*}}$

5) $\dfrac{d\tilde{h}^*}{dw^*} = \dfrac{1}{1+\xi^*} > 0$

$$\frac{d\tilde{h}^*}{d\xi^*} = \frac{-(1-\sigma)(1+\xi^*) - [w^* - (1-\sigma)\xi^*]}{(1+\xi^*)^2} = -\frac{w^* + (1-\sigma)}{(1+\xi^*)^2} < 0$$

- $\dfrac{d\tilde{h}^*}{dw^*} = \dfrac{1}{1+\xi^*} > 0$

Avec fonction d'utilité CRRA, l'offre de travail ne répond pas à l changement permanent de la productivité sur le marché.

Ici, on parle de la productivité domestique, et de plus, il y a plus de marges d'ajustement.

6) Pb optimal:

$$V(k_t, w_t, \xi_t) = \max_{\substack{k_{t+1}, \tilde{h}_t \\ c_{Mt}, c_{Ht}}} \left\{ \ln(c_{Ht} + c_{Mt}) + \xi_t \ln(1 - \tilde{h}_t) + \beta E_{w, \xi} \left[V(k_{t+1}, w_{t+1}, \xi_{t+1}) \right] \right\}$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_{Mt} = f(k_t) \\ c_{Ht} = w_t \tilde{h}_t \end{cases}$$

Hilroy

$$[k_{t+1}] \quad \frac{1}{c_{M_t}+c_{H_t}} = \beta\, E_{\omega_{t+1},\xi_t}\left[\frac{f'(k_{t+1})+1-\delta}{c_{M_{t+1}}+c_{H_{t+1}}}\right]$$

$$[\tilde{h}_t] \quad \frac{w_t}{c_{M_t}+c_{H_t}} = \frac{\xi_t}{1-\tilde{h}_t}$$

- Comme d'après le pb de la firme, $r_t = f'(k_t)$, les CPOs coïncident.
- Comme $\pi_t + r_t k_t = f(k_t)$, les contraintes coïncident.

7) Condition intra-temporelle du ménage:

$$\frac{w_t}{c_t} = \frac{\xi_t}{1-\tilde{h}_t}$$

Pour simplifier, $\tilde{h}_t \to h_t$.

$$\frac{w_t}{c_t} = \frac{\xi_t}{1-h_t} \Longrightarrow w_t(1-h_t) = \xi_t c_t \Longrightarrow w^* e^{\hat{w}_t}(1-h^* e^{\hat{h}_t})$$
$$= \xi^* e^{\hat{\xi}_t} c^* e^{\hat{c}_t}$$
$$= w^*(1-h^*) e^{\hat{\xi}_t+\hat{c}_t}$$

$$\Longrightarrow e^{\hat{\xi}_t+\hat{c}_t-\hat{w}_t} = \frac{1-h^* e^{h_t}}{1-h^*}$$

$$e^x \approx 1+x \Longrightarrow \hat{h}_t = \frac{1-h^*}{h^*}\left(\hat{w}_t - \hat{\xi}_t - \hat{c}_t\right)$$

II Dans le cas vu en classe (pas de taxe sur la richesse), les deux allocations diffèrent car, sans engagement,

le gvt a une incitation à taxer à 100% le capital une fois l'investissement réalisé.

C'est tjs le cas, que la dotation initiale soit ϕ ou $(1-\tau)\phi$...

[Clairement, le gvt n'a pas de raison de choisir $\tau = 1$, ce qui serait le pire pour le ménage.]

III Pb optimal ?

$$V(k_t, g_t) = \max_{k_{t+1}} A(c_t) + B(g_t) + \beta E_{g_t}\left[V(k_{t+1}, g_{t+1})\right]$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = f(k_t)$$

CPO [k_{t+1}] $\quad -A'(c_t) + \beta E_{g_t}\left[V_1(k_{t+1}, g_{t+1})\right] = 0$

$\boxed{\text{EV}}$ $\quad V_1(k_t, g_t) = A'(c_t)\left[f'(k_t) + 1 - \delta\right]$

$$\Rightarrow A'(c_t) = \beta E_{g_t}\left\{ A'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right] \right\}$$

$\rightarrow$ définit la règle de décision $k_{t+1} = I(k_t, g_t)$.

Pour simplifier, prenons $\delta = 1$.

$$\Rightarrow A'(c_t) = \beta E_{g_t}\left\{ A'(c_{t+1}) \cdot f'(k_{t+1}) \right\}$$

$$\Rightarrow A'\Big(f(k_t) - g_t - I(k_t, g_t)\Big) = \beta E_{g_t}\left\{ A'\Big(f(I(k_t, g_t)) - g_{t+1} - I\big(I(k_t, g_t), g_{t+1}\big)\Big) \times f'(I(k_t, g_t)) \right\}$$

$\Rightarrow$ Donc, oui, I dépend toujours de g_t, à travers la contrainte de ressource, et à travers le conditionnement de $E_g(\cdot)$.