Optimisation de fonctions d'une variable

Décembre 2016

Problème économique/optimisation mathématique

- Beaucoup de *problèmes économiques* peuvent se “traduire” en *problèmes d'optimisation mathématique*:
  - maximisation d'une utilité ou d'un profit,
  - minimisation de coûts.
- Nous allons apprendre à optimiser une fonction d'une variable:
  - techniques très similaires pour la maximisation et pour la minimisation.
- Nous allons développer les méthodes mathématiques, mais aussi de l'intuition derrière ces dernières. Cela nous aidera pour la suite:
  - optimisation de fonctions de plusieurs variables,
  - optimisation sous contraintes de fonctions de plusieurs variables.

Maximum global vs. maximum local

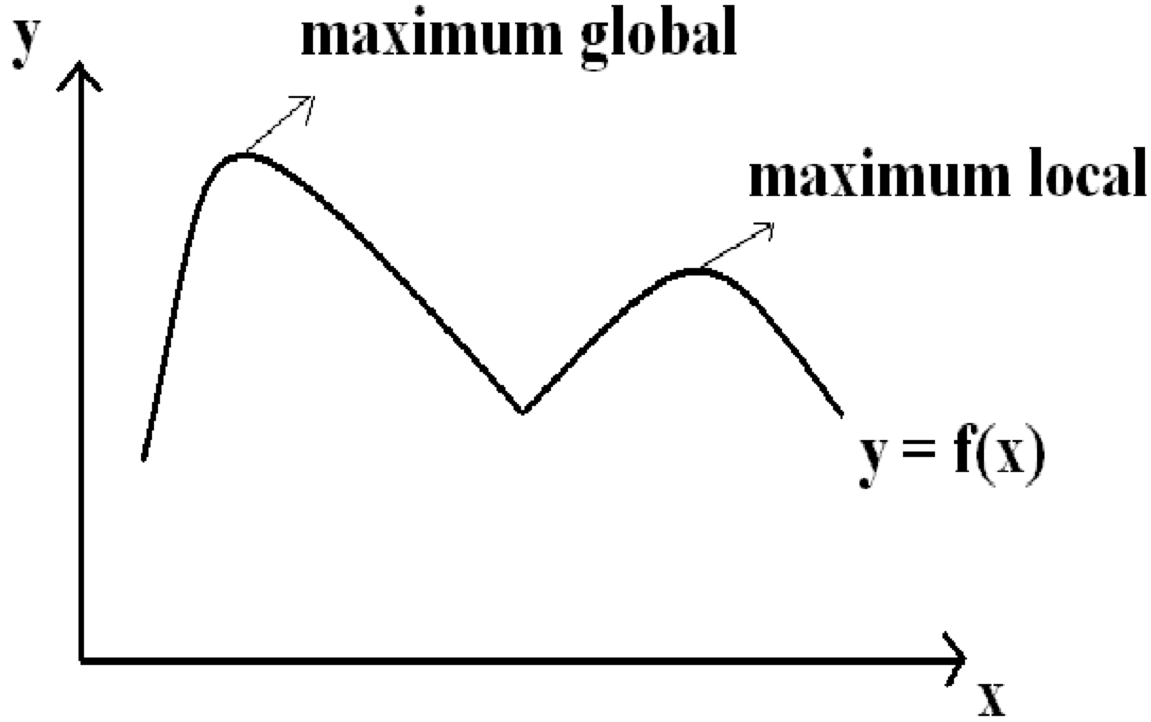
- Définition: Un maximum **global** pour la fonction f est le point x^* tel que

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \textbf{pour tout } x.$$

- Définition: Un maximum **local** pour la fonction f est un point x^* tel que

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \textbf{sur un intervalle autour de } x^*.$$

- *Remarque #1:* Une fonction peut avoir plusieurs maxima locaux.
- *Remarque #2*: Des définitions similaires s'appliquent pour des minima locaux ou globaux ($\leq$ au lieu de $\geq$).


y
maximum global
maximum local
y = f(x)
x

Conditions du premier et second ordre

- La méthode consiste à:

    1. vérifier une condition sur la dérivée première de f ("condition du premier ordre"),
    2. vérifier une condition sur la dérivée seconde de f ("condition du second ordre").

- Les deux conditions doivent être vérifiées pour obtenir un extremum (maximum ou minimum).

Condition du premier ordre pour un max (1)

- Une condition nécessaire pour un maximum est que la dérivée au point x^* soit nulle, i.e.

$$f'(x^*) = 0.$$

- On la dénote la "**condition de premier ordre**" (CPO).
- Un tel point x^* s'appelle un **point stationnaire**.
- *Remarque*: il peut y avoir plusieurs points stationnaires...

Condition du premier ordre pour un max (2)

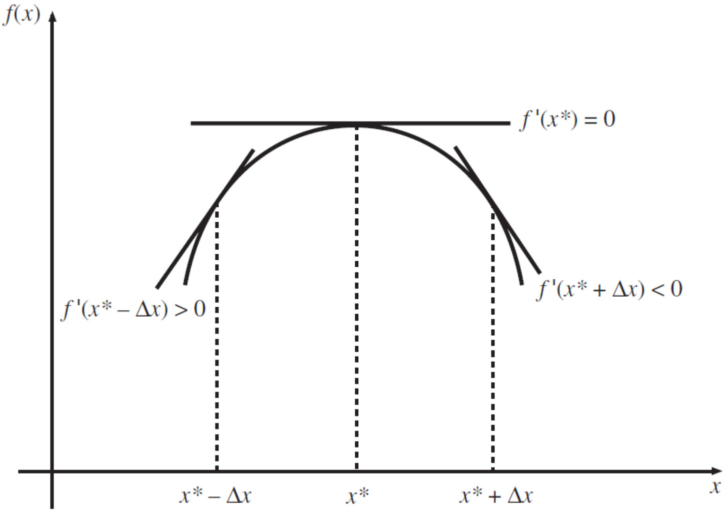
- *Intuition:*

  - si $f'(x^*) > 0$, on peut augmenter $f(x)$ en augmentant x.
  - si $f'(x^*) < 0$, on peut augmenter $f(x)$ en diminuant x.
  - dans les deux cas, on ne pourrait avoir de maximum à ce point.

  - donc, un point stationnaire $[f'(x^*) = 0]$ est la seule possibilité, car tout autre option peut être écartée...

- C'est pourquoi la CPO est une condition **nécessaire**: elle doit être satisfaite pour qu'une fonction puisse avoir un maximum.
  - donc, si la CPO n'a pas de solution, il ne peut y avoir un maximum.

Point stationnaire - maximum.



Condition du premier ordre pour un max (3)

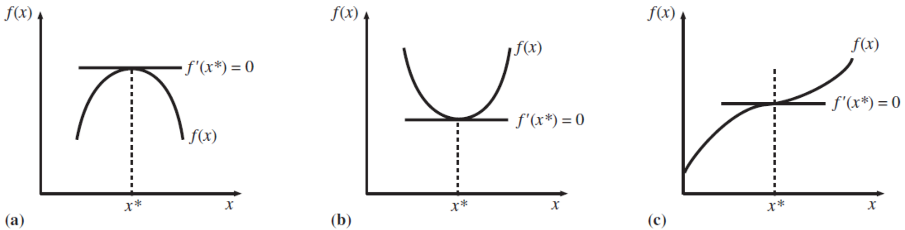
- **Attention:**

  La CPO est une condition nécessaire, mais pas forcément suffisante...

- Un point stationnaire n'est pas toujours un maximum...

- Cela peut être:
  - un maximum,
  - un minimum,
  - un point d'inflexion.

La condition de premier ordre n'est qu'une condition nécessaire !



1er cas: maximum.
2ème cas: minimum.
3ème cas: point d'inflexion.

Condition du second ordre pour un max (1)

- *Tout dépend de la courbure de la fonction:*

- On a un maximum quand la fonction est concave autour de x^*.

- On a un minimum quand la fonction est convexe autour de x^*.

- On a un point d'inflexion quand la courbure de f change en x^*.

Condition du second ordre pour un max (2)

- Condition du second ordre pour un **maximum global**:

  Le point identifié par la CPO est un maximum global, si la fonction est strictement concave partout.

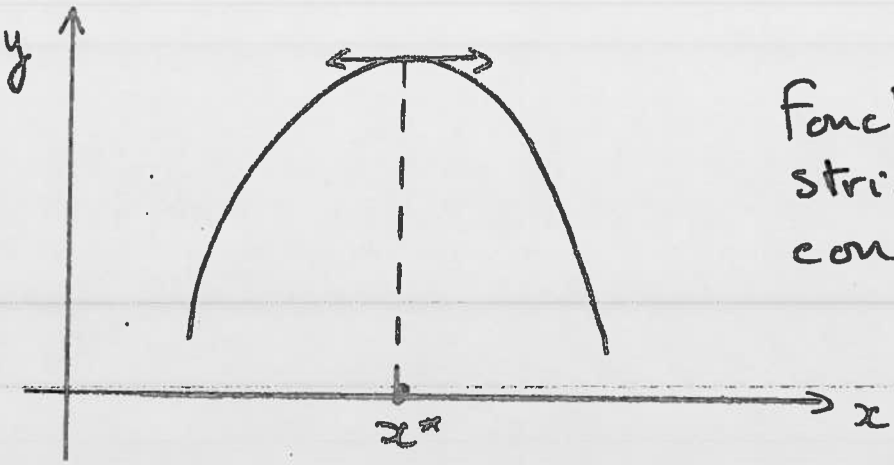
Si $f''(x) < 0$ **pour tout** x, alors le maximum en x^* est **global**.

- Condition du second ordre pour un **maximum local** en x^*:

  Le point identifié par la CPO est un maximum local, si la fonction est strictement concave localement.

Si $f''(x^*) < 0$, alors le maximum en x^* est **local**.

Intuition pour la CSO d'un max



Fonction strictement concave

pt stationnaire $[f'(x^*)=0]$

- Comme $f''(x)<0 \longrightarrow f'$ décroissante.

- Donc $\begin{cases} f'(x) \text{ positive avant } x^*. \\ f'(x) \text{ négative après } x^* \end{cases}$

- Donc $\begin{cases} f(x) \text{ croît avant } x^*. \\ f(x) \text{ décroît après } x^*. \end{cases}$

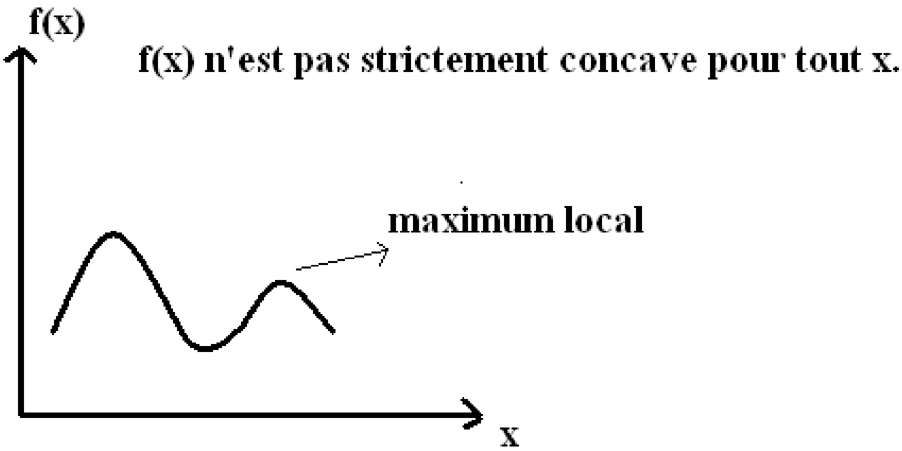
- Donc, x^* identifie bien un max ...

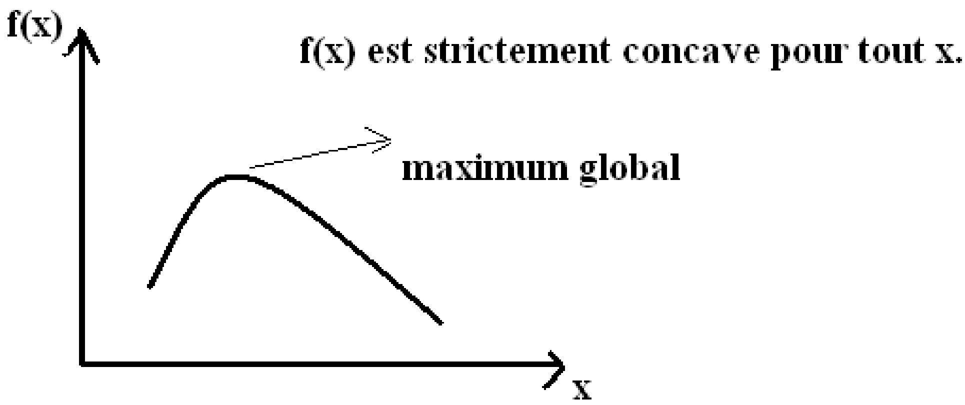
Condition du second ordre pour un max (3)

- *Remarque #1:*
  Un max requiert (i) un point stationnaire, et (ii) concavité de la fonction objectif (f).

- *Remarque #2:*
  - Les conditions du second ordre (CSO) sont des conditions **suffisantes**: *si* elles sont remplies, cela *suffit* pour un maximum (cela dit, on *peut* avoir un maximum global *même si* la CSO globale n'est pas vérifiée).

- *Remarque #3*:
  - La CSO pour un max **global** impose une condition **globale**, i.e pour tout x.
  - La CSO pour un max **local** impose une condition **locale**, i.e. en x^* seulement.


f(x)
f(x) n'est pas strictement concave pour tout x.
maximum local
x


f(x)
f(x) est strictement concave pour tout x.
maximum global
x

CPO + CSO pour un max

- Résumons:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x^*) = 0, \\ f''(x) < 0 \text{ pour tout } x, \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \text{max global.}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x^*) = 0, \\ f''(x^*) < 0, \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \text{max local (en } x^*\text{).}$$

Conditions pour un min (1)

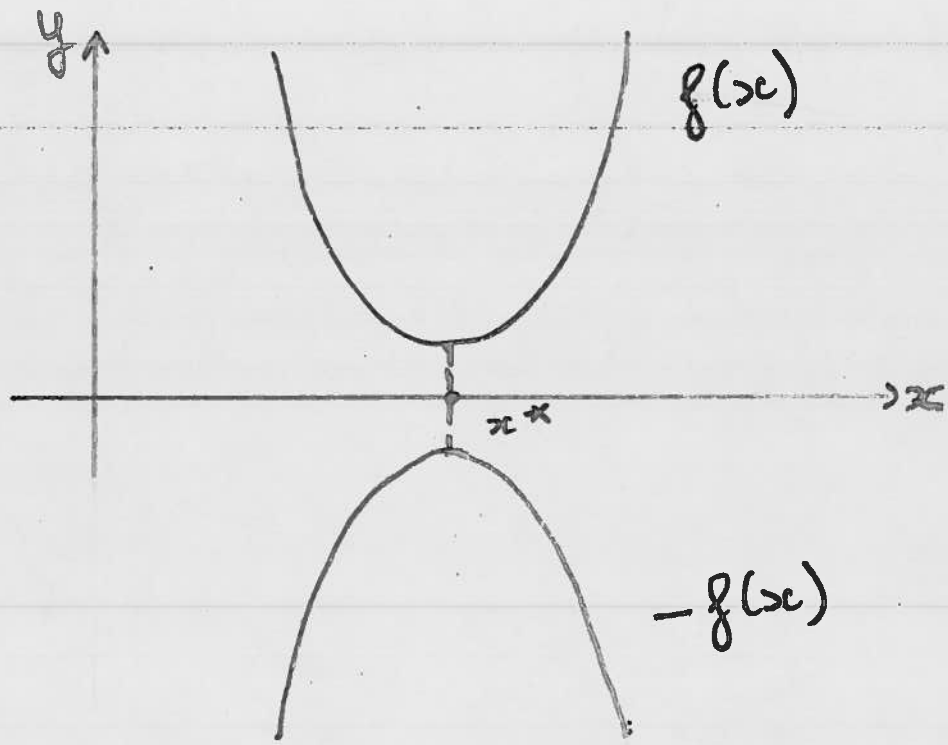
- On peut adapter la méthode à la recherche d'un minimum.
- L'intuition est que le problème peut être transformé en la recherche d'un maximum:

  Un minimum de la fonction f est un maximum de la fonction $-f$.

- Nous pouvons donc utiliser la méthode décrite ci-dessus.

Transformation

minimisation $\longleftrightarrow$ maximisation



Si x^* est un maximum de $-f(x)$,

c'est aussi un minimum de $f(x)$.

Conditions pour un min (2)

- Cherchons un max de $(-f)$:

$$\begin{array}{lcccl} -f'(x^*) = 0 \ (CPO) & \Longrightarrow & f'(x^*) = 0 & \Longrightarrow & \textit{pt stationnaire} \\ -f''(x) < 0 \ (CSO) & & f''(x) > 0 & & \textit{stricte convexité} \end{array}$$

- *Remarque*:

  Les conditions pour un min sont (presque) les mêmes que pour un max:

$$\underline{\text{max}} \quad \begin{cases} \text{pt stationnaire,} \\ f \text{ strict. concave.} \end{cases} \qquad \underline{\text{min}} \quad \begin{cases} \text{pt stationnaire,} \\ f \text{ strict. convexe.} \end{cases}$$

(globalement convexe$\rightarrow$min global; localement convexe$\rightarrow$min local.)

Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - max global vs. max local,
  - CPO / condition nécessaire / point stationnaire / point d'inflexion,
  - CSO / condition suffisante,
  - condition globale vs. condition locale,
  - *conditions pour un min* vs. *conditions pour un max*.

Appendice A: Problèmes économiques

- Problème d'un monopoleur.

- Problèmes éditeur vs. auteur.

Appendice B: Problèmes mathématiques

- Recherche des extrema des fonctions suivantes:
  - $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$,
  - $f(x) = -x^2 - 2x$,
  - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16$,
  - $f(x) = \ln x$,
  - $f(x) = e^x$,
  - $f(x) = x^p - x$ *(où p est un paramètre)*,
  - $f(x) = x. \ln x$.