ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I **Intra Automne 2017**
Professeur: Alain Delacroix

** Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier. Rendez l'examen **avec les questions**.
** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Soit la fonction

$$f_p(x) = \ln(x+p) - \ln x.$$

a) Nous commençons par supposer que $p > 0$. *(i)* Précisez les domaines de définition de f_p, f'_p et f''_p, *(ii)* calculez ses dérivées premières et secondes, *(iii)* à partir de là, produisez le tableau de variations habituel et (iv) tracez la courbe de la fonction. *On vous demande de tracer sa forme générale, en respectant la monotonicité et la courbure de f_p, que vous pouvez déterminer à partir du tableau.*
b) Nous supposons maintenant que $p < 0$. Répondez aux mêmes questions qu'en 1a).
c) Tracez la fonction f_p quand $p = 0$. *Ne faites pas de tableau pour cela.*

QUESTION 2: (15 points)
Calculez les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes:
a. $f(x) = x + 1/x$; b. $f(x) = e^x/x$; c. $f(x) = x(\ln x - 1)$; d. $f(x) = (\ln x)^2$; e. $f(x) = \sqrt{e^x}$.

QUESTION 3: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$q = p^{-\alpha},$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée et α un paramètre strictement positif. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = \beta q, \quad \text{où } \beta \text{ est un paramètre strictement positif.}$$

a. Quelle est l'élasticité prix-demande (ou élasticité de la demande)? Donnez-en une définition et calculez là.
b. On suppose dorénavant que $\alpha = 2$ et donc que $q = 1/p^2$. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
c. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Quel est le profit π^* correspondant? Détaillez vos calculs.
d. Est-ce que q^* croît ou décroît avec β? Même question pour le prix p^* et le profit π^*? Expliquez tout.

QUESTION 4: (15 points)

a. Soit la fonction $f(x) = ax \ln x$, où a est une paramètre non nul. Utilisez les conditions de premier et second ordre pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.

b. Soit la fonction $g(x) = (x-1)e^x$. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.

c. Soit la fonction $h(x) = \ln(x^2) - x$, où $x > 0$. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux. Expliquez tout.

QUESTION 5: (10 points)

a. Utilisez les conditions de premier et second ordre pour trouver les extrema de la fonction $f(x) = e^{px} - qx$, où p et q sont des paramètres non nuls. De quel type d'extremum s'agit-il? *Vous pouvez avoir besoin de faire des hypothèses supplémentaires sur les paramètres p et q pour pouvoir obtenir une réponse.* Expliquez.

b. Soit f^* la valeur atteinte par la fonction f à son extremum. Vérifiez que f^* ne dépend que du *ratio* des deux paramètres. Expliquez.

c. Trouvez une condition sur les paramètres p et q pour que la fonction garde un signe constant. Expliquez.

QUESTION 6: (15 points)

a. Calculez le déterminant $|A_p|$ de la matrice

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 \\ p^3 & p^4 & p^5 \\ p^6 & p^7 & p^8 \end{bmatrix}.$$

Quel résultat dit "classique", vu en classe, cela confirme-t-il?

b. Pour quelles valeurs du paramètre p est-ce que la forme quadratique associée à la matrice

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix}$$

est positive définie? Écrivez cette forme quadratique "sous forme développée". Expliquez tout.

c. Montrez que la matrice suivante ne peut jamais être positive définie:

$$C_p = \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & p+1 \\ 1 & p+1 & p+1 \end{bmatrix}$$

QUESTION 7: (15 points)

a. Calculez toutes les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f(x,y) = x + y, & f(x,y) = xy, \\ f(x,y) = e^{xy}, & f(x,y) = \frac{x}{y^3}. \end{cases}$$

b. Montrez que si $f(x)$ est concave, alors $f(x) + ax + b$ l'est également pour tous les paramètres (a, b).