Automne 2017
Intra ECO 9015
Solutionnaire

Question I

1a) . Firme choisit h_t, k_t

pour $\max_{h_t, k_t} f(h_t, k_t) K_t^{\omega} - w_t h_t - r_t k_t$

. Les CPOs sont : $\begin{cases} f_1(h_t, k_t) K_t^{\omega} = w_t \\ f_2(h_t, k_t) K_t^{\omega} = r_t \end{cases}$

1b) Pour le ménage, état $\longrightarrow k_t$ [et K_t...]

contrôle $\rightarrow (c_t, h_t, k_{t+1})$

(variables "indépendantes": h, k_{t+1})

L'équation de Bellman du problème est :

$$V(k_t) = \max_{c_t, h_t, k_{t+1}} \left\{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V(k_{t+1}) \right\}$$

$$\text{t.q. } c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + T_t = (1-\tau_h) w_t h_t + (1-\tau_k) r_t k_t$$

1c) Cherchons à résoudre cette équation.

$$[k_{t+1}] \quad -u_1(c_t, 1-h_t) + \beta V'(k_{t+1}) = 0$$

$$[h_t] \quad (1-\tau_h) w_t u_1(c_t, 1-h_t) - u_2(c_t, 1-h_t) = 0$$

Enveloppe: $$V'(k_t) = [(1-\tau_k) r_t + 1 - \delta] u_1(c_t, 1-h_t)$$

En combinant: $$\begin{cases} u_1(c_t, 1-h_t) = \beta \left[(1-\tau_k) r_{t+1} + 1 - \delta \right] u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1}) \\ (1-\tau_h) w_t u_1(c_t, 1-h_t) = u_2(c_t, 1-h_t) \end{cases}$$

1ère équation : L'utilité marginale de la consommation aujourd'hui est égale à l'utilité marginale de l'investissement (évaluée aujourd'hui).

2è équation : L'utilité marginale de la consommation de travailler une unité de temps supplémentaire est égale à la désutilité du travail.

2 a) Aux 4 conditions du premier ordre, il faut ajouter :
- la contrainte de budget du ménage,
- la contrainte de budget du gouvernement,
- l'égalité des variables individuelles et agrégées.

- La contrainte de budget des ménages est :

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + T_t = (1-\tau_h) w_t h_t + (1-\tau_k) r_t k_t$$

- Celle du gouvernement est :

$$T_t + \tau_h w_t H_t + \tau_k r_t K_t = g$$

- Et finalement, $\begin{cases} h_t = H_t, \\ k_t = K_t. \end{cases}$

//

Avec les formes fonctionnelles retenues, on peut spécifier un peu plus. Mais avant, on peut combiner les équations ci-dessus et obtenir

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g = w_t h_t + r_t k_t.$$

En utilisant le th. d'Euler (et les CPOs de la Firme), on peut réécrire cette équation comme :

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g = y_t K_t^{\omega} = y_t k_t^{\omega}.$$

Ainsi, on arrive à :

$$\begin{cases} u_1(c_t, 1-h_t) = \beta\left[(1-\tau_k) f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) k_{t+1}^{\omega} + 1-\delta\right] u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1}) \\ (1-\tau_h) w_t \, u_1(c_t, 1-h_t) = u_2(c_t, 1-h_t) \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g = f(h_t, k_t) k_t^{\omega} \end{cases}$$

Si $f(h_t, k_t) = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha}$ et $u(c_t, 1-h_t) = \ln c_t + A \ln(1-h_t)$,

alors le système ci-dessus devient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_t} = \beta\left[(1-\tau_k)(1-\alpha) h_{t+1}^{\alpha} k_{t+1}^{\omega-\alpha}\right] \dfrac{1}{c_{t+1}} \\ (1-\tau_h)\alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\omega} \dfrac{1}{c_t} = \dfrac{A}{1-h_t} \\ c_t + k_{t+1} + g = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\omega} \end{cases}$$

[utilisant enfin (!) l'hypothèse que $\delta = 1$]

2b) Le problème du planificateur est donné par :

$$V(k_t) = \max_{c_t, h_t, k_{t+1}} \{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V(k_{t+1}) \}$$

$$\text{t.q. } c_t + k_{t+1} + g = h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\omega}$$

[Différence avec l'équilibre :

+ pas de prix,

+ contrainte de ressource agrégée,

+ externalité internalisée.]

Les CPOs sont :

$$[k_{t+1}] \quad -u_1(c_t, 1-h_t) + \beta V'(k_{t+1}) = 0$$

$$[h_t] \quad \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\omega} u_1(c_t, 1-h_t) = u_2(c_t, 1-h_t)$$

Enveloppe : $V'(k_t) = u_1(c_t, 1-h_t) . (1-\alpha+\omega) h_t^{\alpha} k_t^{\omega-\alpha}$

En combinant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_t} = \beta \dfrac{1}{c_{t+1}} (1-\alpha+\omega) h_{t+1}^{\alpha} k_{t+1}^{\omega-\alpha} \\ \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\omega} \dfrac{1}{c_t} = \dfrac{A}{1-h_t} \end{cases}$$

2c) A l'état stationnaire, on obtient :

<u>Equilibre</u>

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \beta\left[(1-\tau_k)(1-\alpha)\, h^{\alpha} k^{\omega-\alpha}\right] \\ (1-\tau_h)\,\alpha\, h^{\alpha-1} k^{1-\alpha+\omega}\, \dfrac{1}{c} = \dfrac{A}{1-h} \\ c + k + g = h^{\alpha} k^{1-\alpha+\omega} \end{array}\right\}$$

<u>Optimal</u>

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \beta\,(1-\alpha+\omega)\, h^{\alpha} k^{\omega-\alpha} \\ \alpha\, h^{\alpha-1} k^{1-\alpha+\omega}\, \dfrac{1}{c} = \dfrac{A}{1-h} \\ c + k + g = h^{\alpha} k^{1-\alpha+\omega} \end{array}\right.$$

* Les deux systèmes sont différents. La différence vient des deux premières conditions.
* Pour égalité des deux approches, la deuxième équation nous dit que $\tau_h = 0$.
* La première équation nous dit que $(1-\alpha)(1-\tau_k) = 1-\alpha+\omega$. Cette égalité ne peut jamais être satisfaite, car $\tau_k > 0$ et $\omega > 0$.

3a) Optimal + Lagrangien :

Le planificateur
$$\left[\begin{array}{l} \max\limits_{\{k_{t+1},\, h_t,\, c_t\}_{t=0\dots+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t) \\ \text{t.q.} \quad h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\omega} = c_t + k_{t+1} + g, \forall t. \\ k_0, K_0 \text{ donnés.} \end{array}\right.$$

On cherche des séquences d'allocation.

Le Lagrangien est :

$$\max_{\{c_t,\, k_{t+1},\, h_t\}_{t=0\dots+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \left[\beta^t u(c_t, 1-h_t) + \lambda_t \left[h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha+\omega} - c_t - k_{t+1} - g\right]\right]\Big\}$$

Les CPO sont:

$$\left.\begin{array}{ll} [c_t] & \beta^t u_1(c_t, 1-h_t) - \lambda_t = 0 \\ [k_{t+1}] & -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1-\alpha+\omega) h_{t+1}^{\alpha} k_{t+1}^{\omega-\alpha} = 0 \\ [h_t] & -\beta^t u_2(c_t, 1-h_t) + \lambda_t \alpha h_t^{\alpha-1} k_t^{1-\alpha+\omega} = 0 \end{array}\right\}$$

- En combinant la première et la troisième condition :

$$u_2(c_t, 1-h_t) = \alpha\, h_t^{\alpha-1}\, k_t^{1-\alpha+\omega}\, u_2(c_t, 1-h_t)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{1-h_t} = \alpha\, h_t^{\alpha-1}\, k_t^{1-\alpha+\omega}\, \frac{1}{c_t}$$

- En combinant la première et la deuxième condition, on obtient :

$$u_1(c_t, 1-h_t) = \beta\, u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1})\,(1-\alpha+\omega)\, h_{t+1}^{\alpha}\, k_{t+1}^{\omega-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_t} = \beta\, \frac{1}{c_{t+1}}\,(1-\alpha+\omega)\, h_{t+1}^{\alpha}\, k_{t+1}^{\omega-\alpha}$$

Il faut ajouter la condition de transversalité :

$$\lim_{t \to +\infty} \beta^t\, u_1(c_t, 1-h_t)\, k_{t+1} = 0$$

[Remarque : les conditions correspondent bien, à ce que l'on a trouvé en 2b).]

Question II

(a) Soit un monde à trois périodes.

- Commençons par la période #3 :

La fonction de valeur est $V_3(H_3) = \max\limits_{c_3, H_4} \ln c_3$

$$\text{t.q. } c_3 + H_4 = H_3$$
$$H_4 \geq 0.$$

Clairement $\left.\begin{array}{l} H_4 = 0 \\ c_3 = H_3 \end{array}\right\} \longrightarrow V_3(H_3) = \ln H_3$

- Passons maintenant à la période #2 :

$$V_2(H_2) = \max_{c_2, H_3} \ln c_2 + \beta V_3(H_3)$$
$$\text{t.q. } c_2 + H_3 = H_2$$

$$\Longrightarrow V_2(H_2) = \max_{c_2} \ln c_2 + \beta \ln(H_2 - c_2)$$

$$[c_2] \quad \frac{1}{c_2} = \frac{\beta}{H_2 - c_2} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{H_2}{1+\beta} \\ H_3 = \dfrac{\beta}{1+\beta} H_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V_2(H_2) = \ln c_2 + \beta \ln(\beta c_2) = \beta \ln \beta + (1+\beta)\ln c_2 = \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + (1+\beta)\ln H_2$$

• Enfin, à la période 1 :

$$V_1(H_1) = \max_{c_1, H_2} \; \ln c_1 + \beta V_2(H_2) \quad \text{t.q.} \quad c_1 + H_2 = H_1$$

$$\Rightarrow V_1(H_1) = \max_{c_1} \; \ln c_1 + \beta \left[\beta \ln \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + (1+\beta)\ln(H_1 - c_1) \right]$$

$$[c_1] \quad \frac{1}{c_1} = \frac{\beta(1+\beta)}{H_1 - c_1} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{H_1}{1+\beta(1+\beta)}}$$ (règle de décision)

et $H_2 = \dfrac{\beta(1+\beta)}{1+\beta(1+\beta)} H_1$.

b) La surprise change sa variable d'état en période 2. Maintenant, elle prend sa décision, basée sur $\overline{H_2}$ (et non $H_2(H_1)$).

Soit ΔU le gain en utilité, de son point de vue à $t = 2$.

$$\Delta U = V_2(\overline{H_2}) - V_2(H_2(H_1)) = (1+\beta)\ln\left[\overline{H_2}/H_2(H_1)\right]$$

Vu de la première période,

ce gain est $\beta(1+\beta)\ln\left[\overline{H_2}/H_2(H_1)\right]$

c) Sous ce scénario, la décision au début de la période #2 est déjà prise et est irréversible, quand Niki gagne à la loterie.

Sans gain inattendu:

(période 1)

$$H_1 \to c_1 = \frac{H_1}{1+\beta(1+\beta)}$$

$$H_1 \to H_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta(1+\beta)} H_1$$

(période 2)

$$H_2 \to c_2 = \frac{H_2}{1+\beta} = \frac{\beta}{1+\beta(1+\beta)} H_1$$

$$H_2 \to H_3 = \frac{\beta^2}{1+\beta(1+\beta)} H_1$$

Avec gain inattendu:

(période 2)

$$c_2 = \frac{\beta H_1}{1+\beta(1+\beta)} + \left(\bar{H}_2 - H_2\right)$$

$$H_3 = \frac{\beta^2}{1+\beta(1+\beta)} H_1 \quad \text{(irréversible)}$$

- Si elle avait pu changer sa décision, son utilité à horizon infini aurait été $V_2(\overline{H}_2)$.

- Sans pouvoir changer, son utilité à horizon infini est tel que:

  * avant la lotterie, Niki choisit $H_3(H_2)$ et $c_2(H_2)$.

  * Niki gagne à la lotterie, mais ne peut changer H_3 et ne fait donc que consommer plus.

  * Comme son H_3 est inchangé, son utilité à partir de la période #3 est la même.

  * Son utilité est donc $\ln\left(c_2(H_2) + \overline{H}_2 - H_2\right) + \beta V_3[H_3(H_2)]$

$$= \ln[c_2(H_2)] + \ln\left[\frac{c_2(H_2) + \overline{H}_2 - H_2}{c_2(H_2)}\right] + \beta V_3[H_3(H_2)]$$

$$= V_2(H_2) + \ln\left[1 + \frac{\overline{H}_2 - H_2}{c_2(H_2)}\right]$$

$\Rightarrow$ La perte d'utilité de ne pouvoir réoptimiser est donc :

$$V_2(\bar{H}_2) - \left[V(H_2) + Ln\left(1 + \frac{\bar{H}_2 - H_2}{c_2(H_2)}\right)\right].$$

$$= \underbrace{V_2(\bar{H}_2) - V(H_2)}_{\substack{\text{calculé} \\ \text{précédemment} \\ = (1+\beta) Ln \, \bar{H}_2/H_2}} - Ln\left(1 + \frac{\bar{H}_2 - H_2}{c_2(H_2)}\right).$$

On peut tout exprimer en fonction de $\frac{\bar{H}_2}{H_2} \equiv 1+\varepsilon$.

$$= (1+\beta) Ln(1+\varepsilon) - Ln\left[1 + (1+\beta)\varepsilon\right].$$

Question III

(a) le problème de la firme caractérisée par la productivité s est :

$$\max_{n} \; p s f(n) - wn = \max_{n} \; s\sqrt{n} - wn .$$

$$[n] \quad \frac{s}{2\sqrt{n}} - w = 0 \qquad \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{s}{2w}$$

$$\Rightarrow N^d(s) = \frac{s^2}{4w^2}$$

(b) $\Pi(s) = s\sqrt{N^d(s)} - w\, N^d(s)$

$$\Rightarrow \Pi(s) = s\,\frac{s}{2w} - w\,\frac{s^2}{4w^2} \qquad \Rightarrow \Pi(s) = \frac{s^2}{4w} .$$

(c) Valeur d'entrée : $\underbrace{E_s[\Pi(s)]}_{\text{Valeur une fois sur marché}} - c_e$.

La libre entrée dicte que $E_s[\Pi(s)] - c_e = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{4w} + \frac{1}{2}\frac{s_2^2}{4w} = c_e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8w} + \frac{1}{2w} = c_e$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{w = \frac{5}{8c_e}}}$$

d) Comme $\hat{n}_1 < \bar{n} < \hat{n}_2$, la réglementation est "mordante" pour certaines firmes.

Conditionnellement à w:

+ les s_1-firmes font le même profit.
+ les s_2-firmes font moins de profit. (puisque leur problème est contraint.)

→ Pour que la condition de libre entrée soit satisfaite, il faut que $w \downarrow$.

e) * Si $\underline{w} < \hat{w}$, il n'y a bien sûr pas d'effet.

* Si $\underline{w} > \hat{w}$, alors la réglementation est "mordante".

* chaque type de firme va réagir en baissant sa demande d'emploi, dû aux produits marginaux décroissants du travail.