ECO 9015

Intra - Automne 2018

Question 1:

I $V(S_t) = \max_{u_{1t}, u_{2t}} S_t f(u_{1t}, u_{2t}) - w_1 u_{1t} - w_2 u_{2t} + \frac{1-\lambda}{1+\rho} E_t V(S_{t+1})$

Etat : S_t.
Contrôle : u_{1t}, u_{2t}.

II Le problème est statique.

$$\left.\begin{array}{ll} [u_{1t}] & S_t f_1(u_{1t}, u_{2t}) = w_{1t} \\ [u_{2t}] & S_t f_2(u_{1t}, u_{2t}) = w_{2t} \end{array}\right\}$$

Avec $\alpha = \beta = 1/2$, $f(u_{1t}, u_{2t}) = (u_{1t} u_{2t})^{1/4}$.

Les CPO deviennent:

A t donné: $$\begin{cases} \frac{s}{4}\,(u_1u_2)^{-3/4}\,u_2 = w_1 \\ \\ \frac{s}{4}\,(u_1u_2)^{-3/4}\,u_1 = w_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ définit $u_1^d(s)$ et $u_2^d(s)$.

(en particulier, $u_1w_1 = u_2w_2$, ce qui est normal, étant donné les poids égaux sur les deux types de travail.)

A partir de là, $\pi(s) = s\,f(u_1^d(s), u_2^d(s)) - w_1u_1^d(s) - w_2u_2^d(s)$.

$$\ldots \Longrightarrow \pi(s) = \frac{s}{2}\left(u_1^d(s)\,u_2^d(s)\right)^{1/4}.$$

Multipliant les deux CPOs ci-dessus,

$$\frac{s^2}{16}\,(u_1u_2)^{-1/2} = w_1w_2$$

$$\ldots \Longrightarrow u_1u_2 = \left[\frac{s}{4}\right]^4 \frac{1}{(w_1w_2)^2}$$

$$\ldots \Longrightarrow \pi(s) = \frac{s^2}{8\sqrt{w_1w_2}}.$$

à la correction

III Après discrétisation de l'EB,

$$\forall i=1\ldots N, \quad V(s_i) = \pi(s_i) + \frac{1-\lambda}{1+\rho} \sum_{j=1}^{N} Q_{ji} V(s_j).$$

IV Avec la notation plus compacte,

$$\forall i=1\ldots N, \quad V_i = \pi_i + \hat\beta \sum_{j=1}^{N} Q_{ji} V_j$$

(Nous avons dénoté $\hat\beta = \frac{1-\lambda}{1+\rho}$)

$$\Longrightarrow \forall i, \ (1-\hat\beta Q_{ii}) = \pi_i + \hat\beta \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Q_{ji} V_j$$

D'où la matrice:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & (i) & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ (i) \rightarrow & \begin{bmatrix} & & & & \\ (-\hat\beta Q_{1i}) & (-\hat\beta Q_{2i}) & \ldots (1-\hat\beta Q_{ii}) & \ldots & (-\hat\beta Q_{Ni}) \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}}_{\Omega} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix}}_{b}$$

à la correction

. Soit la matrice identité $(N \times N)$: I_N

. Dénotons le vecteur $\hat{\Upsilon} = [\gamma_1 \dots \gamma_N]^T$

Alors $$\left(I_N - \hat{\beta} Q^T\right) V = \hat{\Upsilon}.$$

. On voit que : $\begin{cases} \Omega = I_N - \hat{\beta} Q^T \text{ est } N \times N. \\ \hat{\Upsilon} \text{ est } N \times 1 \end{cases}$

V Valeur d'entrée : $V_e = \frac{1-\lambda}{1+\rho} \sum_{i=1}^{N} \nu_i V_i$.

Libre entrée : $V_e = c_e$

Ainsi, $$c_e = \frac{1-\lambda}{1+\rho} \sum_{i=1}^{N} \nu_i V_i.$$

- Dans l'équation $(I_N - \hat{\beta} Q^T) V = \hat{\Pi}$,

tous les éléments de $I_N - \hat{\beta} Q^T$ sont paramétriques.

→ donc la solution V dépend du vecteur endogène $\hat{\Pi}$.

→ Comme les π_i sont déterminés à l'inconnue $(w_1 w_2)$ près,

La condition de libre entrée permet de trouver $(w_1 w_2)$, mais pas w_1, ni w_2 séparément.

VI Pour souligner que $w_1 w_2$ est en principe connu, écrivons le produit comme $\overline{W_1 W_2}$

Les deux CPOs sur le travail nous donnent que :

$$n_1 n_2 = \left[\frac{5}{4}\right]^4 \frac{1}{\overline{W_1 W_2}^{\,2}}$$

à la correction

Donc, $n_1^d(s) = \dfrac{4\,w_2}{s}\,(n_1 n_2)^{3/4} = \dfrac{4\,w_2}{s}\left(\dfrac{s}{4}\right)^3 \dfrac{1}{\overline{w_1 w_2}^{\,3/2}}$

$$\longrightarrow \boxed{n_1^d(s) = \frac{s^2}{16}\,\frac{1}{\overline{w_1 w_2}^{\,3/2}}\,w_2 = \frac{s^2}{16\,\overline{w_1 w_2}^{\,1/2}}\cdot\frac{1}{w_1}}$$

De même, $\boxed{n_2^d(s) = \dfrac{s^2}{16\,\overline{w_1 w_2}^{\,1/2}}\cdot\dfrac{1}{w_2}}$

[L' "autre" variable endogène est $\overline{w_1 w_2}$ ..]

VII) Soit la mesure $\mu(n_1, n_2)$.

$$\begin{tikzcd}
 & n_1(s_1) \\
s_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & n_2(s_1) \\
\vdots & \\
 & n_1(s_N) \\
s_N \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & n_2(s_N)
\end{tikzcd}$$

Donc, $\mu(n_1, n_2) = 0$, sauf pour les N paires

$$\big(n_1(s_1), n_2(s_1)\big), \ldots\ldots, \big(n_1(s_N), n_2(s_N)\big).$$

à la correction

Nous dénotons $\hat{p}(n_1, n_2)$ la mesure "au facteur d'échelle près".

Alors, $\forall i = 1 \dots N$,

$$\underbrace{\hat{p}\left[n_1(s_i), n_2(s_i)\right]}_{\hat{p}(s_i)} = (1-\lambda)\left\{ \nu(s_i) + \sum_{p=1}^{N} Q_{ip}\, \hat{p}\left[n_1(s_p), n_2(s_p)\right] \right\}$$

VIII

$$N_j^d / M = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{p}(s_i) + \nu(s_i)\right) n_j^d(s_i)$$

$\rightarrow$ dépend de W_j

(pour $j = 1, 2$)

$$\Pi / M = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{p}(s_i) + \nu(s_i)\right) \pi(s_i) - C_e$$

$$X / M = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{p}(s_i) + \nu(s_i)\right) s_i\, f\left(n_1^d(s_i), n_2^d(s_i)\right)$$

Pour l'instant : + $\pi(s_i)$ sont connus (puisque W_1, W_2 connus)

$\Longrightarrow \Pi / M$ connu

à la correction

· De même, si $f(n_1(S_i), n_2(S_i))$ sont connus (proportionnels à $\Pi(S_i)$).

$\Rightarrow X/\Pi$ connu

· Par contre, N_j^d/Π pas encore connu, puisque $n_j(S)$ dépend de w_j.

IX Le problème du ménage de type j est de :

$$\max_{x_j, N_j} \ln x_j - A N_j$$

$$\text{t.q.} \quad w_j N_j + \frac{\Pi}{H_1 + H_2} = x_j$$

CPO $[N_j]$ $\quad \frac{w_j}{x_j} = A$

(donc, x_j connu si w_j connu)

à la correction

(X) Les trois inconnues restantes sont w_1, w_2 et M.

. Equilibre marché des biens : $H_1 x_1 + H_2 x_2 + M c_e = M \cdot (X/M)$.

$$\longrightarrow H_1 \frac{w_1}{A} + H_2 \frac{w_2}{A} + M c_e = M \cdot (X/M)$$

Eq #1

connu

. Equilibre marché du travail qualifié :

$$H_1 \cdot N_1^s = M \cdot (N_1^d/M) \quad \text{Eq. \#2}$$

dépend de w_1

$$= \frac{1}{w_1}\left(\frac{w_1}{A} - \frac{M}{H_1 + H_2} \Pi/M\right)$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} \text{Eq. \#1} \\ \text{Eq \#2} \\ w_1 w_2 = \text{valeur connue} \end{cases}$$

//

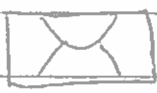
Question 2 :

(1) $\begin{cases} \text{Etat: } k_t, p_t \\ \text{Contrôle: } k_{t+1} \end{cases}$

D'où :

$$V(k_t, p_t) = \max_{k_{t+1}} \ln(p_t k_t - k_{t+1}) + \beta E_p V(k_{t+1}, p_{t+1})$$

(2) CPO [k_{t+1}] $\quad \frac{1}{c_t} = \beta E_p V(k_{t+1}, p_{t+1})$



$$V_1(k_t, p_t) = \frac{p_t}{c_t}$$

D'où : $\quad E_p\left[\beta \frac{c_t}{c_{t+1}} \cdot p_{t+1}\right] = 1.$

(3) Traditionnellement, on a :

$$E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\cdot\left(z_{t+1} f'(k_{t+1}) + 1-\delta\right)\right] = 1$$

Ici, le rendement est complètement aléatoire (μ_{t+1}) indépendamment de décisions précédentes.

(4) Supposons que $\mu_t = \mu \leq 1$.

La seule variable d'état est k_t.

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} \ln(\mu k_t - k_{t+1}) + \beta V(k_{t+1})$$

CPO $[k_{t+1}]$ $\quad \frac{1}{c_t} = \beta V'(k_{t+1})$

$$V'(k_t) = \frac{\mu}{c_t}$$

D'où : $\quad \beta \frac{c_t}{c_{t+1}}\cdot\mu = 1$

(5) Conjecturons que $c_t = \gamma_c k_t$

D'après la CPO : $\beta \frac{\gamma_c k_t}{\gamma_c k_{t+1}} \rho = 1$

$\Rightarrow \beta \frac{\rho k_t}{(\rho - \gamma_c) k_t} = 1$

$\Rightarrow \frac{\beta \rho}{\rho - \gamma_c} = 1 \Rightarrow \gamma_c = \rho(1-\beta)$

. Il faut que $0 < \gamma_c < 1$ (Inada).

$\Rightarrow 0 < \rho(1-\beta) < 1$

Toujours vrai !

[$\forall \rho, \beta$, les conditions d'Inada nous poussent à garder un peu pour le futur.]

(6) On trouve $\frac{d\gamma_c}{dp} = \beta > 0$

Si on garde plus de son investissement ($p \uparrow$),

$\rightarrow$ on investit plus,

$\rightarrow$ on va consommer plus.

(7) Supposons $p = 1$.

7.1) Variables d'état : k_t, ε_t.
Variable de contrôle $\rightarrow k_{t+1}$.

7.2) $V(k_t, \varepsilon_t) = \max_{k_{t+1}} \varepsilon_t \ln\left(k_t - k_{t+1}\right) + \beta E_\varepsilon V(k_{t+1}, \varepsilon_{t+1})$

CPO[k_{t+1}] $\quad \frac{\varepsilon_t}{c_t} = \beta E_\varepsilon V_1(k_{t+1}, \varepsilon_{t+1})$

$V_1(k_t, \varepsilon_t) = \frac{\varepsilon_t}{c_t}$

D'où $\quad E_\varepsilon\left[\beta \frac{\varepsilon_t c_t}{\varepsilon_{t+1} c_{t+1}}\right] = 1$.

Cette CPO détermine une règle de décision

$$k_{t+1} = \phi(k_t, \varepsilon_t)$$

et donc $c_t = k_t - \phi(k_t, \varepsilon_t)$.

Comme ε_t peut prendre deux valeurs, il est pratique d'écrire :

$$k_{t+1} = \phi_i(k_t) \qquad i = L, H$$

Alors, $$\frac{\varepsilon_i}{k_t - \phi_i(k_t)} = \beta \left\{ \left[\pi_{li} \frac{\varepsilon_l}{\phi_i(k_t) - \phi_l(\phi_i(k_t))} + \pi_{hi} \frac{\varepsilon_h}{\phi_i(k_t) - \phi_h(\phi_i(k_t))} \right] \right\}$$

$(i = l, h)$

— // —

Question # 3

Equilibre :

→ L'équilibre peut être défini avant d'être caractérisé.

+ Un équilibre est constitué de :

+ décisions du ménage représentatif :
  - consommation
  - investissement
  - travail

[Avec PD : règles de décision,
Approche Lagrangienne : liste d'allocations.]

+ décisions de la firme représentative :
  - demande de travail
  - demande de capital

+ prix (salaire, rendement du capital),

+ taxes forfaitaires,

(k_0 donné)

telles que :

- étant donné prix, ménages optimisent,
  - Avec PD : satisfont EB,
  - App. Lagrangienne : maximisent utilité à horizon infini.
- étant donné prix, firmes optimisent,
  - [maximisent profit]
- les marchés sont équilibrés,
- le budget du gvt est équilibré.

<u>Caractérisation de l'équilibre :</u>

Conditions d'équilibre encadrées

<u>Ménage</u>

$$V(k^o_t) = \max_{k_{t+1},\, h_t,\, c_t} u(c_t, 1-h^o_t) + \beta V(k_{t+1})$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + k^o_{t+1} - (1-\delta)k^o_t + T_t = \Pi_t + (1-\tau_h) w_t h^o_t + (1-\tau_k) r_t k^o_t$$

$[k_{t+1}^o]$ $\quad u_1(c_t, 1-h_t^o) = \beta V'(k_{t+1}^o)$

$\boxed{\text{X}}$ $\quad V'(k_t^o) = \left[(1-\tau_k) r_t + 1 - \delta\right] u_1(c_t, 1-h_t^o)$

$$\boxed{u_1(c_t, 1-h_t^o) = \beta\left[(1-\tau_k)_{k_{t+1}} + 1-\delta\right] u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1}^o)}$$

$[h_t^o]$ $\quad \boxed{(1-\tau_h) w_t\, u_1(c_t, 1-h_t^o) = u_2(c_t, 1-h_t^o)}$

Firme $\quad \pi_t = \max\limits_{k_t^d, h_t^d} f(h_t^d, k_t^d) - w_t h_t^d - r_t k_t^d$

$[h_t^d]$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} f_1(h_t^d, k_t^d) = w_t \\ f_2(h_t^d, k_t^d) = r_t \end{array}}$

Marchés équilibrés $\quad$ 1) $\boxed{H_t^o = H_t^d} = H_t$

marché du travail $\quad$ [représentativité : $h_t^o = H_t^o$, $h_t^d = H_t^d$]

2) $\boxed{K_t^o = K_t^d} = K_t$

marché du capital $\quad$ [$k_t^o = K_t^o$, $k_t^d = K_t^d$]

3) $\boxed{C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t + g = f(H_t, K_t)}$

↳ marché des biens

→ (Nous savons que certaines de ces conditions sont redondantes.)

+ Budget du gouvernement équilibré :

$$\boxed{g = T_t + \tau_h w_t H_t + \tau_k r_t K_t .}$$

//

Optimal

→ L'optimal peut être défini avant d'être caractérisé.

+ Une allocation optimale est constituée de :

+ allocations (consommation, investissement, travail)

... qui maximisent l'utilité du ménage représentatif sous la contrainte de ressource agrégée.

+ Caractérisation de l'allocation optimale :

$$V(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}, h_t} \left\{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V(k_{t+1}) \right.$$

t.q. $\boxed{c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(h_t, k_t) + g}$

$[k_{t+1}]$ $\begin{cases} u_1(c_t, 1-h_t) = \beta V'(k_{t+1}) \end{cases}$

$[\text{X}]$ $V'(k_t) = u_1(c_t, 1-h_t) \left[f_2(h_t, k_t) + 1-\delta \right]$

$\rightarrow \boxed{u_1(c_t, 1-h_t) = \beta u_1(c_{t+1}, 1-h_{t+1}) \left[f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) + 1-\delta \right]}$

$[h_t]$ $\boxed{u_1(c_t, 1-h_t)\, f_1(h_t, k_t) = u_2(c_t, 1-h_t)}$

+ COMPARAISON :

On sait que : $\begin{cases} \text{Budget (ménage, gvt)} \quad (*) \\ \text{Représentativité} \\ \text{Problème firme} \end{cases}$

$\rightarrow \ldots \Rightarrow c + i + g = y$

$(*)$: Si CRS $\rightarrow \Pi = 0$

Si DRS $\rightarrow \Pi > 0$

mais, dans les 2 cas, $\Pi + wH + rK = Y$.

Il reste à comparer les CPOs du ménage (à l'équilibre) avec les CPOs du planificateur social...

Equilibre

$$\begin{cases} \cdot\ \beta \dfrac{u_1(c', 1-h')}{u_1(c, 1-h)} \left[(1-\tau_k) f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 1 \\ \cdot\ (1-\tau_h) f_1(h, k) . u_1(c, 1-h) = u_2(c, 1-h) \end{cases}$$

Optimal

$$\begin{cases} \cdot\ \beta \dfrac{u_1(c', 1-h')}{u_1(c, 1-h)} \left[f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 1 \\ \cdot\ f_1(h, k) . u_1(c, 1-h) = u_2(c, 1-h) \end{cases}$$

Les deux allocations coïncident $\iff (\tau_h, \tau_k) = (0, 0)$

Question 4 Voir cours.