

Une approche intuitive...

1 Comment modéliser un problème macroéconomique?

Avant de voir comment résoudre numériquement un problème dynamique, nous allons voir comment *poser* un problème.

1.1 Environnement

Un modèle est bâti pour déterminer comment une personne prend ses décisions (consommation, investissement, travail ou autres...) dans un contexte donné.¹ Ainsi, on peut essayer de mieux comprendre comment les personnes réagissent aux incitatifs, et même éventuellement de déterminer ces incitatifs. C'est l'approche méthodologique que nous allons prendre.

Tout cela reste encore un peu vague... En fait, le problème typique consiste à maximiser l'utilité à vie d'un agent sous une série de contraintes et sous une structure de marché donnée. S'il y a des firmes, celles maximisent leurs profits. Nous devons donc traduire ce problème sous forme mathématique. Bien sûr, chaque problème est différent, mais l'approche générale est la même. Pour faire cela proprement, il faut toujours commencer par bien décrire l'*environnement* dans lequel se trouve l'agent.

Participants:

Suivant le problème considéré, une économie est constituée d'*agents* (ou *ménages*), de *firmes* et d'un *gouvernement*. Les agents ou les firmes peuvent être identiques entre eux, auquel cas on parle d'*agent représentatif* ou de *firme représentative*. Cependant, ce n'est pas forcément le cas si par exemple on est intéressé à étudier des agents avec différents niveaux d'éducation, différents actifs ou différents âges, ou si l'on veut considérer des firmes utilisant différentes technologies. De même, si l'on considère un environnement international, on peut très bien avoir des agents homogènes à l'intérieur d'un pays, mais pas à travers pays. Bien sûr, un modèle avec agents représentatifs est plus facile à résoudre qu'un modèle avec agents hétérogènes.

Structure de marché:

Il est aussi très important de déterminer le type de marché dans lequel agents et firmes évoluent. Par exemple, un marché peut être compétitif, mais parfois les firmes peuvent être monopolistes ou oligopolistes. Il est impossible de résoudre un problème avant de savoir cela.

Dans le cas de marchés compétitifs, on fait l'hypothèse qu'il y a un grand nombre de ménages et de firmes, chacun de masse nulle. On peut alors supposer que chaque agent et chaque firme est donc trop "petit" pour influencer les prix. Ceux-ci prennent alors les prix comme donnés. Quand chaque ménage et chaque firme

¹Bien sûr, le modèle doit être testable, pour avoir un quelconque intérêt...

“résoud son problème de maximisation”, il ou elle détermine une demande individuelle pour le bien considéré - sa propre demande. Collectivement, l’ensemble des agents et l’ensemble des firmes ne sont pas “petits”. Pour simplifier, on suppose qu’il y a une masse unitaire de ménages et une masse unitaire de firmes. C’est l’action de ce collectif de ménages et de ce collectif de firmes qui détermine les prix: les prix sont tels que la demande agrégée pour le bien considéré est égale à son offre agrégée.

(Pour être complet, un marché n’est pas uniquement caractérisé par son niveau de compétition. On peut parler de marchés incomplets, quand les transactions sur certains biens ne sont pas permises ou possibles. Il se peut aussi que certains marchés souffrent de problèmes informationnels, auquel cas on ne peut plus supposer que l’offre agrégée est égale à la demande agrégée. On parle alors de marchés frictionnels, tels que dans les modèles d’appariement sur le marché de l’emploi. Vous aurez peut-être l’occasion de le voir dans votre cours ECO 9011. Dans mon cours, la plupart des exemples que l’on verra, on ne parlera pas de marchés incomplets ou frictionnels.)

Que doit-on connaître pour résoudre le problème d’un agent ou d’une firme?:

Préférences:

Il faut connaître la fonction d’utilité (ou les préférences) de l’agent que l’on doit maximiser. Suivant le problème, cela peut être une fonction de: (i) la consommation $u(c)$, (ii) des consommations de plusieurs types de biens $u(c_a, c_b)$, (iii) du loisir $u(l)$, (iv) de l’effort $u(e)$, ou (v) d’une combinaison de tout cela, par exemple $u(c, l)$.

Technologie de production:

Pour résoudre le problème des firmes et maximiser leur profits, il faut connaître la technologie qu’elles utilisent pour produire des biens. Typiquement, les firmes vont utiliser travail (h) et/ou capital (k) comme intrants pour produire le bien (y) comme extrant (output). La technologie est donnée par $y = f(h, k)$.

(De manière générale, une technologie est une fonction qui prend des intrants comme arguments et produit un extrant. Vous aurez sûrement l’occasion d’en voir des exemples.)

Contraintes:

La maximisation de l’utilité et des profits se fait sous contrainte(s). Le type de contraintes dépend du problème,

mais en voici quelques exemples typiques:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \text{consommation} \quad \text{épargne} \quad \text{revenus du travail} \quad \text{revenus du capital} \\
 \underbrace{c} \quad + \quad \underbrace{s} \quad = \quad \underbrace{w.h} \quad + \quad \underbrace{r.k}
 \end{array} \\
 \text{contrainte budgétaire du ménage} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \text{travail} \quad \text{loisir} \quad \text{temps par période (normalisé)} \\
 \underbrace{h} \quad + \quad \underbrace{l} \quad = \quad \underbrace{1}
 \end{array} \\
 \text{contrainte d'utilisation du temps} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \text{consommation} \quad \text{investissement} \quad \text{dépenses publiques} \quad \text{production / PIB} \\
 \underbrace{C} \quad + \quad \underbrace{I} \quad + \quad \underbrace{G} \quad = \quad \underbrace{Y}
 \end{array} \\
 \text{contrainte de ressources **agrégées**} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \text{taxes forfaitaires} \quad \text{taxes sur le travail} \quad \text{dépenses publiques} \\
 \underbrace{T} \quad + \quad \underbrace{\tau w H} \quad = \quad \underbrace{G}
 \end{array} \\
 \text{équilibre budgétaire (du gouvernement)}
 \end{array} \right.$$

—> Remarquez l'utilisation de lettres majuscules pour les variables agrégées et de lettres minuscules pour les variables individuelles.

Variables de choix:

Il est nécessaire de décrire quelles sont les décisions que l'agent a à prendre pour maximiser son utilité. Cela peut comprendre (i) la consommation du bien final ou d'un panier de biens, (ii) le travail (ou de façon équivalente, le loisir, puisque typiquement $h + l = 1$), (iii) l'investissement, (iv) l'effort...

Pour la firme, c'est typiquement travail et/ou capital.

1.2 Équilibre vs. Optimum

Dans cette section, nous ne résolvons toujours pas de problème, mais nous continuons à apprendre à poser une problème. Il se trouve qu'il y a deux façons de poser un problème: l'équilibre et l'optimum. Nous considérons chaque cas à tour de rôle, puis les comparons.

1.2.1 Équilibre

Résoudre le problème d'équilibre consiste à déterminer le résultat agrégé quand tous les agents maximisent leur utilité et toutes les firmes maximisent leur profits, et quand agents et firmes interagissent *par l'intermédiaire du marché*. Comme les interactions se font par l'intermédiaire des marchés, l'équilibre détermine les prix de chaque bien. En quelque sorte, l'équilibre essaie de reproduire le comportement des agents "dans la vraie vie".

Nous considérons comme exemple une économie où les marchés sont compétitifs. Nous considérons des agents représentatifs et des firmes représentatives (donc tous les participants sont similaires, ou homogènes). Les ménages et les firmes prennent les prix comme donnés (p_t : prix du bien final à la date t ; w_t : salaire à la date t ; r_t : rendement du capital à la date t).

Les agents sont caractérisés par une fonction d'utilité $u(c_t, l_t)$, où c_t représente la consommation du bien final et l_t représente le loisir. Comme le temps est normalisé à 1 chaque période, nous avons que

$$h_t + l_t = 1, \quad \text{pour tout } t,$$

où h_t représente les heures de travail (offre de travail, que nous dénoterons ainsi h_t^o). Les agents commencent chaque période avec un capital (accumulé) k_t et doivent décider combien travailler (h_t) et combien investir en capital (i_t). Il y a une "loi de transition" du capital qui relie capital au début de la période (k_t), investissement (i_t) et capital à la fin de la période - autrement dit capital au début de la période suivante, k_{t+1} . Cette loi de transition est donnée par

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t,$$

où δ est le taux de dépréciation du capital. Le problème des ménages est de maximiser leur utilité à horizon infini, en choisissant une *séquence d'heures de travail et d'investissements*, prenant les *séquences de prix* comme données, i.e.

$$\max_{\{h_t^o\}_{t=0}^{+\infty}, \{i_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, l_t),$$

sujet à des contraintes chaque période:

$$\begin{cases} h_t^o + l_t = 1, & (\text{contrainte de temps}) \\ w_t \cdot h_t^o + r_t \cdot k_t = c_t + i_t, & (\text{contrainte budgétaire des ménages}) \end{cases}$$

et avec un capital initial donné k_0 . Le taux d'escompte temporel est $\beta \in (0, 1)$.

(Remarquez qu'implicitement, le prix du bien final est normalisé à $p_t = 1$. Normaliser un seul des prix est sans conséquence.)

La firme représentative quant à elle maximise son profit π_t chaque période. Pour produire, elle a besoin des intrants travail et capital. Elle demande donc du travail (h_t^d) et loue du capital k_t^d afin de

$$\max_{h_t^d, k_t^d} \pi_t = f(h_t^d, k_t^d) - w_t \cdot h_t^d - r_t \cdot k_t^d,$$

prenant les prix comme donnés. Ici, nous supposons que le capital est loué chaque période. Si la firme possède son capital (plutôt que le louer), elle subit un coût d'opportunité qui est le même que le coût de location.

Il est très important de voir que, contrairement au problème des ménages, le problème de la firme est *statique*, puisqu'il n'implique que des variables au temps t . Par contre, le problème des ménages est *intertemporel* puisque les décisions à la date t ont un effet sur la date $t + 1$: l'investissement à la date t détermine le capital à la date $t + 1$.

Les deux problèmes ci-dessus considèrent les prix comme donnés. Mais comment ces derniers sont-ils déterminés?: dans le cas de marchés compétitifs, en prenant en compte que l'offre de travail est égale à la demande de travail, et similairement pour le capital. Avec des masses unitaires de firmes et d'agents, les

demandes et offres individuelles obtenues sont aussi égales aux demandes et offres agrégées., i.e. pour tout t , $h_t^o = h_t^d$ et $k_t^o = k_t^d$.

On dit souvent que l'équilibre détermine les *prix* (w_t, r_t) et les *allocations* (k_t, h_t, y_t).

*Définition (générique) d'un équilibre:*²

Un équilibre est une liste (i) d'allocations (*partie à remplir suivant le modèle*), et (ii) de prix (*même chose*) telles que:

- (1) *étant donnés les prix*, le ménage représentatif maximise son utilité,
- (2) *étant donnés les prix*, la firme représentative maximise ses profits,
- (3) les prix sont tels que les marchés respectifs sont équilibrés.

Nous pouvons également introduire une notation très répandue. Les heures et le capital agrégés sont dénotés H_t et K_t . Comme nous avons une masse unitaire d'agents, H_t et K_t représentent aussi les heures et le capital agrégés par personne.

1.2.2 Optimum

Le problème optimal est le problème d'un "planificateur social" (PS) qui chercherait à maximiser l'utilité à horizon infini du ménage représentatif. Au lieu de représenter le résultat des agents et des firmes interagissant collectivement par l'intermédiaire des marchés, l'optimum représente l'allocation qu'un planificateur social *bienveillant* ordonnerait pour maximiser l'utilité des agents. Ainsi, la fonction à maximiser est la même que dans le problème d'équilibre, mais nous allons voir que le problème est de nature différente.

Rien ne se passe par l'intermédiaire des marchés. Par contre, le PS choisit une séquence d'heures de travail $\{h_t\}_{t=0}^{+\infty}$, et d'investissement $\{i_t\}_{t=0}^{+\infty}$ de façon à maximiser l'utilité à horizon infini de l'agent représentatif $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$, étant donné un capital initial k_0 . Dans ce choix d'allocation optimale, le PS est lui-même soumis à une contrainte de ressource

$$c_t + i_t = f(h_t, k_t), \quad (\text{contrainte de ressource})$$

valide pour tout t . Intuitivement, le PS doit choisir entre consommation et investissement étant donné le bien final disponible, produit à partir du capital et du travail.

1.3 Différence entre équilibre et optimum

La différence fondamentale entre le problème d'équilibre et le problème optimal est que les allocations à l'équilibre sont obtenues en supposant que firmes et ménages interagissent par l'intermédiaire des marchés.

²Implicitement, nous nous sommes placés dans le cas de marchés compétitifs (prix donnés pour les participants, et prix déterminés par l'équilibrage des marchés).

C'est un équilibre dans le sens où tous les participants optimisent (utilité ou profit) et que les prix équilibrent les marchés.

Dans le problème optimal, les marchés n'interviennent pas. En quelque sorte, le PS dit aux ménages combien travailler et investir de façon à maximiser leur utilité. Comme on ne considère pas les marchés, les prix n'interviennent pas. Les firmes ne font pas partie du problème optimal non plus. Comme l'utilité des ménages ne dépend que des allocations et pas des prix, le résultat du problème optimal donne forcément l'utilité maximale que les ménages peuvent atteindre. D'une certaine façon, c'est un repère auquel on peut comparer le résultat du problème d'équilibre.

Suivant les cas, la solution d'équilibre peut correspondre ou pas au problème optimal. Quand les allocations à l'équilibre correspondent aux allocations du problème optimal, on dit que l'équilibre est efficace. Nous allons voir un exemple extrêmement simple où l'équilibre est efficace. Nous verrons au laboratoire des exemples où cela n'est pas le cas.³

Le problème optimal peut aussi être utilisé quand il donne le même résultat que le problème d'équilibre, mais est plus facile à résoudre numériquement.

1.4 Un exemple simple

Prenons un exemple très simple où l'économie dure une période (problème statique). Tous les marchés sont compétitifs. L'agent représentatif a des préférences données par $u(c, l)$. Il a une dotation de temps égale à 1, à répartir entre travail (h^o) et loisir (l). Il peut offrir son travail à la firme en échange d'un salaire w . Le ménage a un stock de capital k_0 qu'il peut louer à la firme pour un rendement r (il n'y a pas d'investissement ici, puisque le problème est statique).

La firme représentative utilise une fonction de production donnée par $y = f(h, k)$ et choisit capital (k^d) et travail (h^d) pour maximiser ses profits.

Le problème du ménage peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned} \max_{c, h^o, l} u(c, l) \\ \text{t.q. } w \cdot h^o + r \cdot k_0 = c \quad \text{et} \quad h^o + l = 1. \end{aligned}$$

Insérant contraintes dans la fonction à maximiser, cela revient à

$$\max_{h^o} u(w \cdot h^o + r \cdot k_0, 1 - h^o).$$

La condition de premier ordre du problème est⁴

$$w \cdot u_1(c, 1 - h^o) = u_2(c, 1 - h^o).$$

³L'équilibre n'est pas efficace par exemple quand l'économie est caractérisée par des externalités ou par des taxes distortionnaires.

⁴La condition de second ordre est satisfaite si la fonction d'utilité est concave.

Toute condition de premier ordre peut s'interpréter intuitivement, toujours en termes marginaux. Ici, la perte marginale de travailler une heure de plus⁵ $u_2(c, 1 - h^o)$, est égale au gain marginal $w.u_1(c, 1 - h^o)$ de pouvoir consommer w unités de consommation de plus. Si ce n'était pas le cas, le ménage n'optimiserait pas. En effet, supposez que $u_2(c, 1 - h^o) > w.u_1(c, 1 - h^o)$. Dans ce cas, l'utilité marginale de la consommation est basse et l'utilité marginale d'une heure de loisir est élevée. Le ménage gagnerait (en utilité) à augmenter son loisir (donc travailler moins), même si cela impliquerait moins de consommation:

$$\underbrace{u_2(c, 1 - h^o)}_{\text{gain à } \uparrow \text{ loisir}} > \underbrace{w.u_1(c, 1 - h^o)}_{\text{perte à } \downarrow \text{ consommation}} .$$

Bien sûr, si $u_2(c, 1 - h^o) < w.u_1(c, 1 - h^o)$, le ménage gagnerait à travailler plus, pour une raison similaire.

Le problème de la firme représentative peut s'écrire

$$\max_{h^d, k^d} \pi = f(h^d, k^d) - w.h^d - r.k^d,$$

ce qui donne les conditions de premier ordre suivantes:

$$\begin{cases} f_1(h^d, k^d) = w, \\ f_2(h^d, k^d) = r. \end{cases}$$

Dans des marchés des facteurs de production compétitifs, la firme paie à ses facteurs ses rendements marginaux. S'il en était autrement, elle emploierait soit trop, soit insuffisamment d'un facteur. En effet, supposez par exemple que $f_1(h^d, k^d) > w$. Le produit marginal du travail (f_1) est plus élevé que son coût (w), et la firme devrait embaucher plus de travailleurs.

Finalement, le marché des facteurs est équilibré, c'est à dire que $h^d = h^o$ et $k^d = k^o = k_0$. Pour simplifier la notation, nous dénotons désormais le travail et le capital à l'équilibre h et k .

Avec une fonction de production à rendements d'échelle constants, le théorème d'Euler nous permet de conclure que $w.h + r.k = f_1(h, k).h + f_2(h, k).k = f(h, k)$. *Au passage, ce même théorème nous permet de dire que les firmes font zéro profit économique à l'équilibre. C'est pour cela, que les profits redistribués ne sont pas dans la contrainte budgétaire du ménage.* Revenant à la contrainte budgétaire des ménages $c = w.h + r.k$, nous pouvons conclure que $c = f(h, k)$. Puisqu'il n'y a pas d'investissement, tout ce qui est produit est consommé.

Ainsi, combinant toutes les conditions ci-dessus, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} f_1(h, k).u_1(c, 1 - h) = u_2(c, 1 - h), \\ c = f(h, k), \\ k = k_0. \end{cases}$$

⁵Plus précisément, une période de durée infinitésimale dt .

Cela nous permet d'obtenir les allocations (c, h, k) . A partir de là, les prix sont obtenus à partir des conditions de premier ordre du problème de la firme, égalisant coûts et produits marginaux.

Considérons désormais le problème optimal. Il peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \max_h u(c, l) \\ \text{t.q. } f(h, k_0) = c \text{ et } h + l = 1. \end{aligned}$$

Insérant les contraintes dans l'objectif, on obtient

$$\max_h u(f(h, k_0), 1 - h).$$

La condition de premier ordre de ce problème est

$$f_1(h, k_0)u_1(f(h, k_0), 1 - h) = u_2(f(h, k_0), 1 - h).$$

On peut vérifier tout de suite que les allocations de l'équilibre sont les mêmes que les allocations provenant du problème optimal. L'équilibre est donc efficace. Un PS bienveillant qui pourrait dire aux ménages combien travailler pour maximiser leur utilité, ne pourrait faire mieux que le marché (dans ce cas).

2 Programmation dynamique - intuition

2.1 Un monde à deux périodes

Nous commençons par un problème à deux périodes, $t \in \{1, 2\}$. Le temps est escompté à un taux $\beta \in (0, 1)$. Les ménages dérivent de l'utilité de la consommation seulement, i.e. $u(c) = \ln c$. La fonction de production est donnée par $f(k) = Ak^\alpha$, où k est le capital. Pour simplifier, le capital est entièrement déprécié chaque période. Comme il n'y a pas d'externalité, nous pouvons étudier le problème optimal pour trouver les allocations.

Première approche, par le Lagrangien: Le problème du planificateur est de

$$\begin{aligned} \max \ln c_1 + \beta \ln c_2, \\ \text{t.q. } c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha, \quad t = 1, 2, \\ k_1 = \bar{k}_1 \text{ (et } k_3 \geq 0). \end{aligned}$$

Le Lagrangien est donné par

$$L = \ln c_1 + \lambda_1 [Ak_1^\alpha - c_1 - k_2] + \beta [\ln c_2 + \lambda_2 (Ak_2^\alpha - c_2 - k_3) + \lambda_3 k_3].$$

Les conditions de premier ordre sont:

$$\begin{aligned}
[c_1] \quad & \frac{1}{c_1} - \lambda_1 = 0, \\
[k_2] \quad & -\lambda_1 + \beta\lambda_2 A\alpha k_2^{\alpha-1} = 0, \\
[c_2] \quad & \frac{1}{c_2} - \lambda_2 = 0, \\
[k_3] \quad & -\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\
[\lambda_1] \quad & \lambda_1(Ak_1^\alpha - c_1 - k_2) = 0, \\
[\lambda_2] \quad & \lambda_2(Ak_2^\alpha - c_2 - k_3) = 0, \\
[\lambda_3] \quad & \lambda_3 k_3 = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre sur c_1 et c_2 impliquent que les multiplicateurs λ_1 et λ_2 sont strictement positifs. La CPO sur k_3 implique qu'il en est de même pour λ_3 . Ainsi $k_3 = 0$ - le ménage n'a aucun intérêt à investir pour avoir du capital en troisième période (et donc réduire sa consommation en période 2), puisqu'il n'y a pas de troisième période! Avec des multiplicateurs strictement positifs, il s'en suit que les contraintes budgétaires sont satisfaites avec égalité.

Le système se réduit donc à

$$\begin{cases}
\frac{1}{c_1} = \beta \frac{1}{c_2} A\alpha k_2^{\alpha-1}, \\
Ak_1^\alpha - c_1 - k_2 = 0, \\
Ak_2^\alpha - c_2 - k_3 = 0, \\
k_3 = 0.
\end{cases}$$

La première équation s'interprète facilement quand on reconnaît que $1/c$ est l'utilité marginale de la consommation et que $A\alpha k^{\alpha-1}$ est le produit marginal du capital...

Ce système se résout comme

$$\begin{cases}
c_1^* = \frac{1}{1+\alpha\beta} Ak_1^\alpha, \\
k_2^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Ak_1^\alpha, \\
c_2^* = A\left(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Ak_1^\alpha\right)^\alpha, \\
k_3^* = 0.
\end{cases}$$

Ce sont les plans optimaux, *faits en début de première période* pour $t = 1, 2$.

Deuxième approche: Le plan optimal fait à la date $t = 1$ est $(c_1^*, c_2^*, k_2^*, k_3^*)$. Maintenant, la date $t = 1$ est passée et l'économie est au début de la période $t = 2$ avec un niveau de capital \bar{k}_2 qui peut être ou ne pas être égal à k_2^* . Donc, le planificateur fait face au problème suivant:

$$\begin{aligned}
& \max \ln c_2, \\
& t.q. \quad c_2 + k_3 \leq A\bar{k}_2^\alpha \text{ et } k_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Il est immédiat que la solution de ce problème est $\hat{c}_2 = A\bar{k}_2^\alpha$ et $\hat{k}_3 = 0$.

On remarque que de manière générale, $c_2^* \neq \hat{c}_2$. La seconde procédure requiert que les choix en deuxième période soient optimaux, *quel que soit le niveau de capital au début de la période*. On dit que les choix en

période $t = 2$ sont *fonctions de la variable d'état en période 2*, dans ce cas le capital k_2 . Ces fonctions sont appelées *règles de décision (policy functions)*. Si l'on supprime le “-” et le “^”, on peut écrire ces *fonctions* de k_2 comme

$$c_2 = Ak_2^\alpha \text{ et } k_3 = 0.$$

Avec ces fonctions, l'utilité maximale réalisée est

$$v_2(k_2) = \ln A + \alpha \ln k_2,$$

également une fonction de k_2 .

Maintenant, revenons une période en arrière. En période 1, le planificateur sait qu'une fois le choix fait pour k_2 , l'utilité maximale *dans le futur* est $v_2(k_2)$. Ainsi, les choix de c_1 et k_2 résolvent le problème suivant:

$$\begin{aligned} \max \quad & \ln c_1 + \beta v_2(k_2), \\ \text{t.q.} \quad & c_1 + k_2 \leq Ak_1^\alpha, k_1 \text{ donné.} \end{aligned}$$

On peut vérifier que la solution à ce problème est $c_1 = (1/(1+\alpha\beta))Ak_1^\alpha$ et $k_2 = (\alpha\beta/(1+\alpha\beta))Ak_1^\alpha$. Remarquez, qu'à nouveau, *ces choix sont fonctions de la variable d'état au début de la première période*, c'est à dire le capital k_1 . On vérifie également que *ces solutions correspondent à celles du problème du lagrangien*.

Cette deuxième approche au problème du planificateur est appelée programmation dynamique. En considérant la dernière fonction à maximiser, vous remarquerez que cette deuxième approche revient à maximiser l'utilité sur l'horizon considéré, en maximisant non seulement l'utilité de la période courante ($\ln c_1$), mais aussi en tenant compte de l'effet du choix fait en première période sur le reste de l'horizon - en supposant qu'après la période courante, un choix optimal sera aussi fait, résultant en une valeur $\beta v_2(k_2)$.

Remarques:

- Les concepts derrière les deux approches sont différents. La première méthode trouve, à la date $t = 1$, les *niveaux* optimaux des choix $(c_1^*, k_2^*, c_2^*, k_3^*)$ tous fonctions de k_1 . Par contre, la programmation dynamique trouve les règles de décision pour chaque période - les règles suivant lesquelles les choix optimaux doivent être faits.
- Si, pour une raison quelconque, le capital k_2 au début de la seconde période différait de k_2^* , alors la solution c_2^* de l'approche lagrangienne (déterminée à $t = 1$), ne serait plus optimale. Par contre, la “règle” de la programmation dynamique $c_2 = Ak_2^\alpha$ continuerait de décrire le choix optimal. Cette caractéristique de la programmation dynamique est appelée le *principe d'optimalité* de Bellman. Intuitivement, un comportement optimal des agents *à partir de chaque période* assure que le choix sur l'ensemble de la période sera également optimal.
- Si les deux approches amènent la même solution, le problème est dit récursif.⁶

⁶La plupart des problèmes que nous allons voir dans ce cours vont être récursifs. Mais ce n'est pas forcément toujours le cas. Quand un problème n'est pas récursif, le solution du Lagrangien à la date $t = 1$ pour l'ensemble de la période est “*time inconsistent*”: l'agent peut avoir une incitation à dévier du plan initial après la première période (ou après un certain nombre de périodes).

2.2 Un monde à T périodes - horizon fini

La programmation dynamique divise un problème à plusieurs périodes en une séquence de problèmes à une période. On vient de le voir quand l'horizon est de deux périodes. Nous allons généraliser à un horizon à T périodes.

Le problème est de

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \ln c_t, \\ \text{t.q.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha, \quad t = 1 \dots T \\ & k_1 = \bar{k}_1 \quad (\text{et } k_{T+1} \geq 0). \end{aligned}$$

La programmation dynamique fonctionne ainsi:

(a) Commençons par la dernière période $t = T$ et résolvons

$$\max_{c_T, k_{T+1}} \ln c_T \quad \text{t.q.} \quad c_T + k_{T+1} \leq Ak_T^\alpha \quad \text{et} \quad k_{T+1} \geq 0.$$

Nous obtenons les règles de décision $k_{T+1} = g_T(k_T) = 0$ et $c_T = h_T(k_T) = Ak_T^\alpha$. Remarquez que ces règles sont indexées par la période en considération. Il n'y a pas de raison que la règle reliant k_3 et k_2 soit la même que celle reliant k_2 et k_1 par exemple - en tout cas, quand l'horizon est fini. La fonction de valeur est $v_T(k_T) = \ln c_T = \ln A + \alpha \ln k_T$.

(b) Allons maintenant à la période $t = T - 1$ et résolvons

$$\max_{c_{T-1}, k_T} \ln c_{T-1} + \beta v_T(k_T) \quad \text{t.q.} \quad c_{T-1} + k_T \leq Ak_{T-1}^\alpha.$$

Après un peu d'algèbre, cela donne les règles de décisions suivantes: $k_T = g_{T-1}(k_{T-1}) = \alpha\beta \frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^2} Ak_{T-1}^\alpha$ et $c_{T-1} = h_{T-1}(k_{T-1}) = \frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^2} Ak_{T-1}^\alpha$. Ceci donne la fonction de valeur suivante, $v_{T-1}(k_{T-1}) = b_{T-1} + (1 + \alpha\beta)\alpha \ln k_{T-1}$, où b_{T-1} est une constante dépendant de $T - 1$, mais pas de k_{T-1} .

Remarquez que, représentatif de la programmation dynamique, cette façon de résoudre le problème initial assure que la décision sera optimale à la date T , quelque soit le capital k_T . Elle assure aussi que la décision sera optimale sur les deux dernières périodes, quel que soit k_{T-1} .

(c) Allons maintenant à la période $T - 2$ et résolvons

$$\max_{c_{T-2}, k_{T-1}} \ln c_{T-2} + \beta v_{T-1}(k_{T-1}) \quad \text{t.q.} \quad c_{T-2} + k_{T-1} \leq Ak_{T-2}^\alpha.$$

Nous obtenons les règles de décision $k_{T-1} = g_{T-2}(k_{T-2}) = \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^2}{1-(\alpha\beta)^3} Ak_{T-2}^\alpha$ et $c_{T-2} = h_{T-2}(k_{T-2}) = \frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^2} Ak_{T-2}^\alpha$. La fonction de valeur est donnée par⁷ $v_{T-2}(k_{T-2}) = b_{T-2} + \frac{1-(\alpha\beta)^3}{1-\alpha\beta} \alpha \ln k_{T-2}$.

Remarquez à nouveau que cette méthodologie assure que les décisions sont optimales à partir de la période i , quelque soit le capital k_i pour $i = T - 2, T - 1, T$.

⁷ Où $b_{T-2} = \beta b_{T-1} + \frac{1-(\alpha\beta)^3}{1-\alpha\beta} \ln A + \ln \left[\frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^2} \right] + \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^2}{1-\alpha\beta} \ln \left[\alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^2}{1-(\alpha\beta)^3} \right]$.

(d) Nous pourrions répéter la procédure jusqu'à ce que la période $t = 1$ soit finalement atteinte... Quel que soit le nombre d'étapes $s = T - t$ ($0 \leq s \leq T - 1$), le problème devient

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \ln c_t + \beta v_{t+1}(k_{t+1}) \quad t.q. \quad c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha.$$

Les règles de décision sont $k_{t+1} = g_t(k_t) = \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} Ak_t^\alpha$ et $c_t = h_t(k_t) = \frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} Ak_t^\alpha$, ce qui nous donne la fonction de valeur⁸ $v_t(k_t) = b_t + \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}{1-\alpha\beta} \alpha \ln k_t$.

Conclusion:

(i) Pour chaque période t , la programmation dynamique représente l'utilité de toutes les périodes à venir par la fonction de valeur $v_{t+1}(k_{t+1})$ et réduit le problème en un problème à une période pour la période t , comme suit

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \ln c_t + \beta v_{t+1}(k_{t+1}) \quad t.q. \quad c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha.$$

(b) Les solutions du problème ci-dessus sont les règles de décisions (policy rules) $k_{t+1} = g_t(k_t)$ et $c_t = h_t(k_t)$. Ces *fonctions* sont les règles qui déterminent la consommation et l'investissement optimaux, étant donné la variable d'état k_t .

(c) Le principe d'optimalité (R. Bellman): si les choix $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^T$ sont optimaux pour l'horizon entier (pour un k_1 donné), alors pour tout k_s donné, les choix $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=s}^T$ doivent être optimaux à partir de k_s et pour le reste de l'horizon.

La solution (les règles de décision) de l'approche "programmation dynamique" doit avoir cette propriété: les règles de décision doivent être optimales à toute date. Le principe d'optimalité permet de calculer la décision optimale par raisonnement rétrograde ("backwards induction"). Ainsi, la décision reste optimale à partir de n'importe quel point.

(d) Le principe d'optimalité requiert que les choix optimaux résolvent le problème de programmation dynamique: à chaque t , c_t et k_{t+1} sont donnés par les règles de décision correspondantes.

(e) Une autre façon d'énoncer le principe d'optimalité est que, pour tout $t = 1...T$, les choix c_t et k_{t+1} sont solutions de

$$v_t(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \ln c_t + \beta v_{t+1}(k_{t+1}) \quad t.q. \quad c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha.$$

Cette équation est l'*équation de Bellman* pour notre problème.

2.3 Un monde avec $T = \infty$ - horizon infini

La section précédente nous a permis d'aborder la programmation dynamique de façon intuitive. Cependant, nous avons vu que les calculs (analytiques) ne sont pas particulièrement simples. De plus, résoudre le problème "à la main" est impossible de manière générale. Il se trouve en fait que résoudre un problème à horizon infini est plus simple qu'un problème à horizon fini (on peut voir un problème à horizon infini comme la limite d'un problème à horizon fini.) Et l'intuition développée pour $T < \infty$ va être la même que pour $T = \infty$.

⁸ Où $b_t = \beta b_{t+1} + \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}{1-\alpha\beta} \ln A + \ln[\frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}] + \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-\alpha\beta} \ln[\alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}]$.

Quand $T = \infty$, il n'y a pas de dernière période pour commencer la procédure récursive. Mais prenez $T \rightarrow \infty$. Les règles de décision

$$\begin{cases} k_{t+1} \rightarrow g(k_t) = \alpha\beta Ak_t^\alpha, \\ c_t \rightarrow h(k_t) = (1 - \alpha\beta)Ak_t^\alpha, \end{cases}$$

puisque $0 < \alpha\beta < 1$.

Les règles de décision ne dépendent du temps que par la variable d'état k_t . Les règles sont dites *invariables au temps* (vous avez pu remarquer que les indices sur les fonctions g et h ont disparu). C'est pour cela que souvent, les indices de temps sont supprimés et que l'on dénote les variables une période plus tard par un ' (prime). Par exemple, k_{t+1} est dénoté k' . Avec cette notation, les règles de décision sont $k' = g(k) = \alpha\beta Ak^\alpha$ et $c = h(k) = (1 - \alpha\beta)Ak^\alpha$.

En conséquence, la fonction de valeur est aussi invariante au temps et est donnée par⁹ $v(k) = b + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k$. Finalement, l'équation de Bellman devient

$$v(k) = \max_{c, k'} \ln c + \beta v(k') \quad t.q. \quad c + k' = Ak^\alpha.$$

⁹Utilisez la note précédente pour trouver b .

Un peu de formalisme...

3 Le problème de croissance optimale de Ramsey

Considérons une économie avec un agent représentatif et une firme représentative. Le temps est discret et les agents ont une durée de vie infinie. Les marchés sont compétitifs et il y a trois types de commodités: un bien de consommation, du capital physique et du travail.

Le ménage est doté d'une quantité $a_0 > 0$ de capital physique à la date 0 et d'une unité de travail par période. À la date 0, le ménage vend ses facteurs de production à la firme et gagne¹⁰

$$R_0 \cdot a_0 + w_0,$$

où R_0 et w_0 sont les prix du capital et du travail. Ce revenu peut être consommé ou épargné comme capital pour la date $t = 1$. La consommation (c_0) et l'épargne (a_1) à la date 0 satisfont

$$c_0 + a_1 = R_0 \cdot a_0 + w_0.$$

De même, à chaque période, dénotant (c_t, a_{t+1}) les décisions du ménage à la date t et (R_t, w_t) les prix des facteurs de production à la même date, nous avons que

$$c_t + a_{t+1} = R_t \cdot a_t + w_t.$$

Étant donné une séquence de prix $\{R_t, w_t\}_{t=0}^{+\infty}$, le ménage choisit une séquence (non-négative) de consommation et d'épargne $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty}$ afin de maximiser

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad t.q. \quad c_t + a_{t+1} = R_t a_t + w_t \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

La fonction u est continue, strictement croissante et strictement concave sur \mathbb{R}^+ , et continument différentiable sur \mathbb{R}^{+*} . Nous supposons que la fonction u est bornée, pour s'assurer que la somme $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t)$ est toujours bornée.¹¹ Nous supposons également que $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = +\infty$ pour être sûr que le ménage choisit toujours une consommation strictement positive à chaque période.

¹⁰Remarquez que nous avons déjà implicitement supposé que le ménage utilisait toute sa dotation en temps par période à travailler. Cela vient du fait que le loisir n'apparaît pas dans la fonction d'utilité et que donc le ménage travaille tout le temps disponible. En d'autres termes, si $h_t + l_t = 1$, alors le ménage choisit $h_t = 1$.

¹¹Comme nous aurons l'occasion de le voir, cela ne changera pas la généralité de nos conclusions, puisque même si la fonction $u(c)$ est non bornée pour $c \in (0, +\infty)$, les séquences de consommation et d'investissement le seront, quelque soit le stock de capital initial.

La firme représentative opère une technologie qui chaque période transforme $k \geq 0$ unités de capital et n unités de travail en des unités de bien de consommation, suivant une fonction de production $F(n, k)$ qui est continument différentiable sur \mathbb{R}^{++} et qui a les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} + F(0, k) = F(n, 0) = 0 \text{ pour tout } n, k \geq 0, \\ + \text{Pour tout } k > 0, F(\cdot, k) \text{ est strictement croissante et strictement concave,} \\ + \text{Pour tout } n > 0, F(n, \cdot) \text{ est strictement croissante et strictement concave,} \\ + F \text{ a des rendements d'échelle constants: } \forall p > 0, F(p.n, p.k) = p.F(n, k), \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(n, k) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow 0} F_1(n, k) = +\infty \text{ pour tout } k > 0, \\ + \lim_{k \rightarrow \infty} F_2(n, k) = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow 0} F_2(n, k) = +\infty \text{ pour tout } n > 0. \end{array} \right.$$

Les fonctions de production possédant l'ensemble de ces caractéristiques sont appelées néoclassiques. Les deux dernières conditions sont appelées les conditions d'Inada. Avec ces fonctions, $F(n, k) = nF(1, \frac{k}{n}) \equiv nf(\frac{k}{n})$, par les rendements d'échelle constants. En conséquence, $F_1(n, k) = f(\frac{k}{n}) - \frac{k}{n}f'(\frac{k}{n})$ et $F_2(n, k) = f'(\frac{k}{n})$. On a donc la propriété que les produits marginaux des facteurs ne dépendent que du *ratio* des facteurs.

La firme choisit travail et capital chaque période de façon à maximiser ses profits, i.e. son problème est de

$$\max_{n_t, k_t} F(n_t, k_t) + (1 - \delta)k_t - R_t k_t - w_t n_t,$$

où δ est le taux de dépréciation du capital.¹²

Définition: Un équilibre compétitif est composé (i) d'une séquence de prix $\{R_t, w_t\}_{t=0}^{+\infty}$, (ii) d'une séquence de décisions du ménage représentatif $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty}$, et (iii) d'une séquence $\{n_t, k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ de décisions de la firme représentative telles que:

- étant donnés les prix, $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty}$ résolvent le problème du ménage,
- étant donnés les prix, $\{n_t, k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ résolvent le problème de la firme,
- le marché du capital est équilibré: $k_t = a_t$ pour tout $t \geq 0$,
- le marché du travail est équilibré: $n_t = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Remarque:

D'après la loi de Walras, le marché du bien de consommation est également équilibré, puisque tous les autres marchés sont équilibrés. La contrainte budgétaire des ménages, couplée avec les deux conditions d'équilibre des marchés, implique que

$$c_t + k_{t+1} = R_t k_t + w_t.$$

La maximisation des profits requiert que $F_1(n_t, k_t) = w_t$ et $F_2(n_t, k_t) = R_t - 1 + \delta$. Ainsi,

$$c_t + k_{t+1} = (F_2(n_t, k_t) + 1 - \delta)k_t + F_1(n_t, k_t)n_t.$$

¹²Nous avons supposé que le ménage vend son capital à la firme. À la place, nous aurions pu supposer que le ménage loue son capital à la firme au taux r_t et reçoit la part non dépréciée du capital à la fin de chaque période. (*Faites le en exercice.*) Ces deux formulations sont équivalentes avec $R_t = r_t + 1 - \delta$ chaque période.

Puisque la fonction a des rendements d'échelle constants,

$$c_t + k_{t+1} = F(n_t, k_t) + (1 - \delta)k_t.$$

Cette dernière expression est bien la condition d'équilibre du marché du bien de consommation. Quand le marché du travail est équilibré, cette dernière expression devient $c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t$.

Le problème peut être écrit sous forme Lagrangienne comme

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} [\beta^t u(c_t) + \lambda_t (R_t a_t + w_t - c_t - a_{t+1})].$$

Les conditions nécessaires du premier ordre pour une solution intérieure du problème du ménage sont, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \beta^t u'(c_t) = \lambda_t, \\ \lambda_t = \lambda_{t+1} R_{t+1}, \end{cases}$$

où λ_t est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire en date t . Puisque la fonction d'utilité est concave, ces conditions sont en fait suffisantes si la *condition de transversalité* suivante est satisfaite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0.$$

Quelle est l'intuition derrière cette condition de transversalité? Imaginons un problème similaire, mais à horizon fini T . Il est alors optimal de consommer tout son capital à la date T et donc $k_{T+1} = 0$, à moins que le consommateur soit rassasié et que la valeur du capital soit zéro ($\lambda_T = \beta^T u'(c_T) = 0$). En prenant ce cas jusqu'à la limite, on obtient la condition de transversalité ci-dessus.

La maximisation des profits requiert que

$$F_1(n_t, k_t) = w_t \text{ et } F_2(n_t, k_t) = R_t - 1 + \delta, \text{ pour tout } t.$$

En combinant les deux conditions du problème du ménage, celles du problème de la firme et l'équilibrage des marchés, nous obtenons:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta), \text{ pour tout } t.$$

Avec la condition d'équilibrage

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t, \text{ pour tout } t,$$

et la condition de transversalité

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0,$$

nous avons une description complète de l'équilibre compétitif. Une allocation $\{c_t, a_{t+1}\}$ fait partie d'un équilibre compétitif si et seulement si elle satisfait les trois conditions ci-dessus, pour un k_0 donné.

Est-ce qu'un équilibre compétitif existe? est-ce qu'il maximise le bien-être? Pour répondre à ces questions, considérez un planificateur social qui peut allouer les ressources pour maximiser le bien-être du ménage représentatif, sous seulement la contrainte de ressource agrégée. Son problème est de

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad t.q. \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t, \quad \text{pour tout } t,$$

et $c_t, k_{t+1} \geq 0$, pour un capital k_0 donné.

Ce problème s'appelle le problème de croissance optimale de Ramsey. Ce problème peut se représenter comme

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} [\beta^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) + (1 - \delta)k_t - c_t - k_{t+1})].$$

Les conditions de premier ordre nous donnent:

$$\begin{cases} u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta], & \text{pour tout } t, \\ c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t, & \text{pour tout } t. \end{cases}$$

Ajoutons à cela la condition de transversalité $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0$ pour le problème du planificateur.

Il est immédiat que ces conditions correspondent exactement à celles de l'équilibre compétitif. Ainsi, les deux allocations doivent coïncider et l'équilibre compétitif maximise le bien-être.

Revenons brièvement à la condition de premier ordre

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta].$$

Cette dernière peut être interprétée intuitivement comme suit. Supposez par exemple que

$$u'(c_t) < \beta u'(c_{t+1}) [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta].$$

Dans ce cas, l'utilité marginale de la consommation à la date t est basse et l'utilité marginale de la consommation à la date $t + 1$, tenant compte de l'escompte (β) et du rendement du capital ($f'(k_{t+1}) + 1 - \delta$) est élevée. Le ménage augmenterait son utilité sur les deux périodes en consommant moins maintenant (et abandonnant $u'(c_t)$), et donc en investissant plus, ce qui lui amènerait un gain d'utilité en période $t + 1$. Ce gain ($\beta u'(c_{t+1}) [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]$) tient compte de l'utilité marginale de la consommation en $t + 1$, de l'escompte, et du rendement de l'investissement supplémentaire fait à la date t .

Bien sur, si l'inégalité était renversée, le ménage devrait optimalement réduire son investissement afin de consommer plus maintenant. Le seul cas où le ménage ne peut augmenter son utilité arrive quand il est indifférent entre augmenter ou réduire son investissement, c'est à dire quand la condition de premier ordre est satisfaite.

Est-ce que le problème de Ramsey a une solution et est-elle unique? La réponse à ces deux questions est “oui”. La première réponse est due au fait que le PS maximise une fonction continue sur un ensemble compact. La deuxième réponse vient du fait que la fonction est strictement concave et que l’ensemble sur lequel il maximise est convexe. (*Pour de plus amples détails, voir Quintin, section 2.6*).

4 Programmation dynamique - théorie

Beaucoup de problèmes d’optimisation dynamique en économie sont des cas spéciaux du problème suivant:

4.1 Le problème à résoudre

À la date t , il y a un vecteur $x_t \in X$ qui décrit l’état du système, où $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Un agent peut choisir une action a_t dans un ensemble $\Gamma(x_t) \in Y \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, qui dépend de l’état du système. On suppose que $\Gamma(x_t) \neq \emptyset$ pour tout $x_t \in X$. L’état du système évolue selon une loi de transition g en fonction de l’état et de l’action choisie à la date t , i.e.

$$x_{t+1} = g(x_t, a_t).$$

À la date t , l’utilité de l’agent $u(x_t, a_t)$ dépend de l’état du système et de l’action choisie. Étant donnés des séquences $\{x_t, a_t\}_{t=0}^{+\infty}$ d’états et d’actions, l’utilité sur l’horizon est donnée par

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t),$$

où $\beta \in (0, 1)$.

Étant donné un état initial x_0 , l’agent résoud

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t), \\ \text{t.q. } a_t \in \Gamma(x_t) \text{ et } x_{t+1} = g(x_t, a_t), \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

Ce problème est stationnaire parce que l’ensemble $\{X, Y, \Gamma, g, \beta, u\}$ ne dépend pas du temps. Nous dénotons ce problème le *Problème Séquentiel*. L’opérateur max est remplacé par l’opérateur sup car nous ne sommes pas assurés pour l’instant qu’une solution à ce problème existe. Le supremum du problème séquentiel pourrait être ∞ . En fait, nous évitons cette possibilité, en supposant que l’utilité u est bornée par en-dessous et au-dessus. (*Dans la plupart des cas économiques, la fonction d’utilité est soit explicitement, soit implicitement bornée.*)

Le fait que l’environnement est stationnaire va en réalité nous faciliter la tâche, même pour un problème à horizon infini. En fait, c’est parce que l’horizon est infini que le problème est stationnaire.

Pour nous aider à assimiler cette notation, il est utile à ce point de la relier au problème de Ramsey déjà vu. Dans ce cas, la variable d'état x_t est le capital k_t . Nous avons que $X \subset \mathbb{R}$, mais nous pouvons montrer que le domaine du capital k_t est en fait borné (cela est fait à la fin de la section 5). Remarquez que X est compact et convexe. La variable d'action a_t est la consommation c_t . L'ensemble Y est également borné. La correspondance Γ est donc définie comme $\Gamma(x_t) = [0, f(x_t) + (1 - \delta)x_t]$. La loi de transition est $g(x_t, a_t) = f(x_t) + (1 - \delta)x_t - a_t$.

Puisque Y est borné, l'utilité est bornée par au-dessus. Nous supposons qu'elle est également définie partout sur Y et donc bornée par en-dessous également.¹³

4.2 La fonction de valeur et l'équation de Bellman

Revenons à notre problème. Définissons $\Pi(x_0)$ l'ensemble des séquences d'actions qui sont "possibles" ("feasible set"), étant donné un état initial x_0 . Ainsi,

$$\Pi(x_0) = \{ \{a_t\}_{t=0}^{+\infty} : \exists \{x_t\}_{t=1}^{+\infty} \text{ t.q. } \forall t \geq 0, a_t \in \Gamma(x_t) \text{ et } x_{t+1} = g(x_t, a_t) \}.$$

Un élément de $\Pi(x_0)$ est appelé un "plan (d'actions) possible".

Dénotons

$$v^*(x_0) = \sup_{\{a_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t),$$

où pour tout $t \geq 0$, $x_{t+1} = g(x_t, a_t)$. Cette fonction, telle que définie, donne le supremum du problème séquentiel, étant donné une valeur d'état initiale x_0 .¹⁴ Remarquez que quand la fonction d'utilité est bornée, le supremum est un maximum de la fonction.

Une façon de construire un plan possible à partir d'un état initial x_0 est de choisir une action $a_0 \in \Gamma(x_0)$, puis de choisir *un plan de continuation* $\{a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(g(x_0, a_0))$. Procéder ainsi génère une utilité sur l'horizon

$$u(x_0, a_0) + \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^{t+1} u(x_{t+1}, a_{t+1}) = u(x_0, a_0) + \beta \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_{t+1}, a_{t+1}),$$

où pour tout $t \geq 0$, $x_{t+1} = g(x_t, a_t)$. Puisque cela est vrai pour tous les plans de continuation envisageables $\{a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(g(x_0, a_0))$, nous avons que

$$v^*(x_0) \geq u(x_0, a_0) + \beta \sup_{\{a_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(g(x_0, a_0))} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_{t+1}, a_{t+1}) = u(x_0, a_0) + \beta v^*(g(x_0, a_0)).$$

¹³Techniquement, cela exclut le cas où $u(c) = \ln c$. Stokey-Lucas traite ce cas en section 4.4.

¹⁴Par définition du supremum, $v^*(x_0)$ est l'unique valeur telle que:

$$+ v^*(x_0) \geq \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t) \text{ pour tout } \{a_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0),$$

$$+ \forall \varepsilon > 0, \exists \{a_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0) \text{ t.q. } \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t) > v^*(x_0) - \varepsilon, \text{ où pour tout } t \geq 0, x_{t+1} = g(x_t, a_t).$$

Comme le choix de a_0 est arbitraire, nous obtenons que

$$v^*(x_0) \geq \sup_{a_0 \in \Gamma(x_0)} u(x_0, a_0) + \beta v^*(g(x_0, a_0)).$$

Nous allons montrer que cette relation est en fait une égalité pour tout $x_0 \in X$, essentiellement le Principe d'Optimalité de Bellman.

Proposition:

$$v^*(x_0) = \sup_{a_0 \in \Gamma(x_0)} u(x_0, a_0) + \beta v^*(g(x_0, a_0)), \quad \forall x_0 \in X. \quad (\text{BE})$$

Ceci constitue l'équation de Bellman pour le problème posé.

Pour un ε donné, on prend un plan $\{\tilde{a}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0)$ qui se rapproche de $v^*(x_0)$. Puisque ce plan est possible, $\{\tilde{a}_t\}_{t=1}^{+\infty} \in \Pi(g(x_0, \tilde{a}_0))$ et donc

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_{t+1}, \tilde{a}_{t+1}) \leq v^*(g(x_0, \tilde{a}_0)).$$

Dans ce cas,

$$v^*(x_0) - \varepsilon < \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, \tilde{a}_t) \leq u(x_0, \tilde{a}_0) + \beta v^*(g(x_0, \tilde{a}_0)) \leq \sup_{a_0 \in \Gamma(x_0)} u(x_0, a_0) + \beta v^*(g(x_0, a_0)).$$

La première inégalité (stricte) provient de l'hypothèse initiale sur le plan possible $\{\tilde{a}_t\}_{t=0}^{+\infty}$. La deuxième inégalité vient du fait que $v^*(g(x_0, \tilde{a}_0))$ représente le supremum d'utilité atteignable à partir de $t = 1$. La troisième inégalité provient du fait que $\tilde{a}_0 \in \Gamma(x_0)$. Puisque cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il s'en suit que $v^*(x_0) \leq \sup_{a_0 \in \Gamma(x_0)} u(x_0, a_0) + \beta v^*(g(x_0, a_0))$. L'égalité est donc établie.

L'équation de Bellman (BE) est une équation fonctionnelle récursive car elle définit une condition que la fonction v^* doit satisfaire (pour tout $x_0 \in X$). Elle est récursive, car elle définit la fonction v^* en fonction d'elle-même.

Nous sommes donc passés de la résolution du problème séquentiel à celle de l'équation de Bellman correspondante.

4.3 Résoudre l'équation de Bellman

Remarquez que l'équation définit un opérateur sur les fonctions définies sur X . Pour toute fonction h , définissons

$$Th(x) = \sup_{a \in \Gamma(x)} u(x, a) + \beta h(g(x, a)), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Une fonction v définie sur X satisfait l'équation de Bellman si $v = Tv$. Nous avons vu que $v^* = Tv^*$. Y a-t-il d'autres solutions? On peut montrer que ce n'est pas le cas parmi les fonctions bornées.

Proposition:¹⁵ Si $Tv = v$ et si v est bornée, alors $v = v^*$.

En conclusion, nous avons montré que dans l'espace des fonctions bornées, la fonction v est le supremum si et seulement si elle satisfait (BE).

L'équation de Bellman nous dit que v^* est le point fixe de l'opérateur T sur l'espace $B(X)$ des fonctions bornées sur X . Cet opérateur a-t-il un point fixe? Nous devons commencer par quelques définitions et théorèmes. *Certains termes utilisés ci-dessous sont définis en appendice 18.*

(Pour plus de détails techniques sur ce qui suit, et pour des définitions précises des concepts mathématiques utilisés, vous pouvez vous référer aux sources suivants: "Principes d'Analyse Mathématique", de W. Rudin; Quintin, chapitre 4; Appendix on functional analysis dans "Recursive Macroeconomic Theory", de L. Ljungqvist et T. Sargent".)

Définition: Soit (S, d) un espace métrique et g une application de S dans S . g est une application contractante de module β , si pour $\beta \in [0, 1)$, $d(g(x), g(y)) \leq \beta d(x, y)$, pour tout $(x, y) \in S^2$.

Définition: Un point fixe de g est un élément $x \in S$ tel que $g(x) = x$.

Théorème du point fixe pour une application contractante: Si (S, d) est un espace métrique complet et $g : S \rightarrow S$ une application contractante de module β , alors:

- a) g a exactement un point fixe \hat{x} dans S ;
- b) pour tout $x_0 \in S$, $d(g^n(x_0), \hat{x}) \leq \beta^n d(x_0, \hat{x})$, $n = 1, 2, \dots$

Il est important de souligner quelques points importants sur ce résultat général. Tout d'abord, il implique que *quelque soit la valeur initiale* x_0 , l'algorithme (calculer les valeurs $g(x_0), g^2(x_0), \dots, g^n(x_0)$) produit une

¹⁵Supposons que $Tv = v$. Pour tout x_0 et $\{\tilde{a}_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0)$, on peut établir récursivement que $v(x_0) \geq \sum_{t=0}^n \beta^t u(x_t, \tilde{a}_t) + \beta^n v(g(x_n, \tilde{a}_n))$. Quand $n \rightarrow +\infty$, le dernier terme tend vers 0 puisque u est bornée, et donc

$$v(x_0) \geq \sup_{\{a_t\}_{t=0}^{+\infty} \in \Pi(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t) = v^*(x_0).$$

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, prenons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\{\delta_t\}_{t=0}^{+\infty}$ tels que $\delta_t > 0$ pour tout t et $\sum_{t=0}^{+\infty} \delta_t < \varepsilon$. Prenons a_0 de façon à ce que $v(x_0) \leq u(x_0, a_0) + \beta v(g(x_0, a_0)) + \delta_0$. Ensuite, pour tout $t > 0$, et étant donné $x_t = g(x_{t-1}, a_{t-1})$, choisissons a_t tel que $v(x_t) \leq u(x_t, a_t) + \beta v(g(x_t, a_t)) + \delta_t$. Par construction, pour chaque $T > 0$,

$$v(x_0) \leq \sum_{t=0}^T \beta^t u(x_t, a_t) + \beta^{T+1} v(g(x_T, a_T)) + \sum_{t=0}^T \delta_t.$$

En prenant les limites, et parce que v est bornée, nous concluons que

$$v(x_0) \leq \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(x_t, a_t) + \varepsilon \leq v^*(x_0) + \varepsilon.$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $v(x_0) \leq v^*(x_0)$ et donc $v = v^*$.

suite convergente, qui a pour limite le point fixe. Cela sera même le principe de base de la première méthode de résolution numérique que nous verrons pour les problèmes posables sous forme de programmation dynamique.

Pour le deuxième point, nous retournons au cas qui nous intéresse vraiment. Comme mentionné, nous sommes à la recherche du point fixe v de l'opérateur T sur l'espace $B(X)$ des fonctions bornées sur X . On peut montrer que l'application contractante peut préserver certaines propriétés de la suite $\{T^n v_0\}$. Par exemple, si la fonction initiale v_0 est monotone, et si T transforme une fonction monotone en une fonction monotone, alors le point fixe est monotone.¹⁶

Il existe une façon simple de démontrer qu'une application est contractante:

Théorème: Les conditions suffisantes de Blackwell pour une application contractante:

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et soit $B(X)$ l'espace des fonctions bornées $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (avec la norme sup). Un opérateur $T : B(X) \rightarrow B(X)$ est une application contractante de module β s'il satisfait les deux conditions suivantes:

1. Monotonicité: Pour tout $f, g \in B(X)$ tels $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$, alors $(Tf)(x) \leq (Tg)(x)$;
2. Escompte: Il existe $\beta \in (0, 1)$ tel que pour tout $b \geq 0$, tout $f \in B(X)$ et tout $x \in X$, $[T(f + b)](x) \leq (Tf)(x) + \beta b$.

Nous utilisons le théorème de Blackwell pour montrer que l'opérateur T est une application contractante sur $B(X)$. Puisque l'utilité u est bornée, Tv est bornée, si v l'est aussi. Ainsi, l'opérateur T transforme des éléments de $B(X)$ en d'autres éléments de $B(X)$. Nous vérifions tout d'abord la monotonicité. Si pour $v, w \in B(X)$, $v(x) \leq w(x)$ pour tout x , alors $u(x, a) + \beta v(g(x, a)) \leq u(x, a) + \beta w(g(x, a))$ pour tout $a \in \Gamma(x)$. Dans ce cas, prenant le supremum de chaque côté, $(Tv)(x) \leq (Tw)(x)$ et ceci pour tout $x \in X$. Nous vérifions maintenant la deuxième condition. Pour tout $(x, a) \in X \times Y$, $u(x, a) + \beta(v(g(x, a)) + b) = u(x, a) + \beta v(g(x, a)) + \beta b$. Prenant le supremum, $[T(v + b)](x) = (Tv)(x) + \beta b$. Comme $\beta < 1$, la condition est satisfaite et l'opérateur T est une application contractante.

4.4 Propriétés de la fonction de valeur

Nous mentionnons maintenant certaines propriétés de la fonction de valeur sans les prouver formellement. Nous essayons de garder l'exposition la plus simple possible. Vous pouvez vous référer à Quintin (chapitre 4) pour plus de détails.

Pour pouvoir énoncer des propriétés générales sur la fonction de valeur, il est nécessaire de restreindre l'étude à des fonctions de valeur continues. Dans ce cas, l'espace sur lequel on cherche un point fixe de l'opérateur T est celui des fonctions continues et bornées sur X , $C(X)$. Nous devons aussi faire quelque hypothèses¹⁷ pour garder l'exposition simple. En fait, certaines des propositions ci-dessous ne requièrent pas l'ensemble de ces hypothèses, mais nous prenons toutes ces hypothèses maintenant pour simplifier l'exposition.

¹⁶Si S' est un sous-ensemble fermé de S et $g(S') \subset S'$, alors le point fixe de g appartient à S' . Alors pour montrer que le point fixe satisfait la propriété P , il suffit de montrer que l'ensemble des points satisfaisant P est fermé et que $g(x)$ satisfait P quand x satisfait P . (Voir les propositions ci-dessous.)

¹⁷**Définition:** la correspondance Γ est croissante si $x \leq x'$ implique que $\Gamma(x) \subset \Gamma(x')$.

Proposition: La fonction de valeur v^* est croissante. Si u est strictement croissante, alors v^* l'est aussi.

Proposition: La fonction de valeur v^* est continue.

Proposition: La fonction de valeur v^* est strictement concave.

Différentiabilité de la fonction de valeur.

Nous passons un peu plus de temps sur la différentiabilité de la fonction de valeur, car si cette dernière est différentiable, alors il devient plus aisé de d'utiliser l'équation de Bellman pour déterminer le choix optimal d'action. Avec les hypothèses ci-dessus, et si pour tout $(x, x') \in X^2$, $\{a \in \Gamma(x) : g(x, a) = x'\}$ est un singleton, alors la "règle de décision" est une fonction et non une correspondance. Dans ce cas, l'action optimale a étant donné l'état x résoud

$$\max_{a \in \Gamma(x)} u(x, a) + \beta v^*(g(x, a)).$$

Proposition. Soit¹⁸ $F(x, x') = \max_{\{a: x'=g(x,a)\}} u(x, a)$. Si la fonction F est différentiable, alors la fonction de valeur v^* est différentiable.

Essentiellement, sous les hypothèses prises, la fonction v "adopte" les propriétés de la fonction u .

5 Application au problème de Ramsey

Le problème de Ramsey est de

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad t.q. \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t, \quad \text{pour tout } t,$$

et $c_t, k_{t+1} \geq 0$, pour un capital k_0 donné. Nous l'avons écrit ainsi sous la forme de son problème séquentiel.

L'équation de Bellman associée est:

$$v(k) = \max_{c \in [0, f(k) + (1-\delta)k]} u(c) + \beta v(k') = \max_{c \in [0, f(k) + (1-\delta)k]} u(c) + \beta v(f(k) + (1 - \delta)k - c).$$

Ici, nous avons choisi la consommation c comme variable d'action (ou variable de contrôle). [Remarquez que nous pouvons écrire de façon équivalente

$$v(k) = \max_{k' \in [0, f(k) + (1-\delta)k]} u(f(k) + (1 - \delta)k - k') + \beta v(k').$$

Hypothèses: Nous allons dorénavant supposer que:

+ Les fonctions u et g et la correspondance Γ sont continues et croissantes en x .

+ L'ensemble X est compact et convexe.

+ Soit $Q(x) = \{x' : x' = g(x, a), a \in \Gamma(x)\}$. Pour tout $(x, x') \in X^2$ et tout $(y, y') \in Y^2$, pour tout $\theta \in [0, 1]$, $\theta y + (1 - \theta)y' \in Q(\theta x + (1 - \theta)x')$. Pour le problème de Ramsey, $Q(x) = \Gamma(x)$.

+ Soit $F(x, x') = \max_{\{a: x'=g(x,a)\}} u(x, a)$. La fonction F est strictement concave.

¹⁸Cette fonction $F(x, x')$ est essentiellement une façon alternative de réécrire la fonction d'utilité. En effet, d'après sa définition, si pour un (x, x') donné, il existe un unique $a = a_0$ tel que $x' = g(x, a)$, alors $F(x, x') = u(x, a_0)$.

Nous verrons par la suite qu'il est parfois plus pratique de résoudre le problème en choisissant la variable d'état la période suivante, plutôt que la variable d'action cette période. Nous avons déjà vu cela avec le problème de Ramsey.

Là, nous avons choisi k' comme variable d'action. Les deux formulations sont équivalentes.]

Il est possible de montrer que toutes les conditions sont remplies pour que v soit différentiable. La condition de premier ordre (CPO) par rapport à c est

$$u'(c) = \beta v'(k')$$

Si l'on connaît la fonction v' , cela définit implicitement c en fonction de k (et donc k' en fonction de k). Les hypothèses prises nous donnent que $c(k)$ et $k' = h(k)$ sont des *fonctions* bien définies de k .

On peut utiliser le théorème de l'enveloppe (TE) afin de trouver

$$v'(k) = [f'(k) + 1 - \delta].u'(c).$$

Utilisant ce dernier résultat une période dans le futur et le combinant avec la condition de premier ordre, nous obtenons

$$u'(c) = \beta(f'(k') + (1 - \delta)).u'(c').$$

Nous avons bien sûr déjà eu l'occasion d'interpréter intuitivement cette condition. *Cette condition est souvent appelée la condition d'Euler du problème.*

Dans beaucoup de problèmes, on s'intéresse à l'état stationnaire d'une économie. Ce dernier est défini comme l'état vers lequel l'économie converge. Cela requiert bien sûr que le modèle converge vers un état stationnaire particulier, possiblement asymptotiquement. Nous démontrons ci-dessous la convergence *globale* de l'économie vers son état stationnaire. Nous démontrons en fait que cette convergence est *monotonique*.

Puisque la fonction d'utilité u est strictement concave, la fonction de valeur v l'est également. Cela va nous aider à montrer que les fonctions $c(k)$ et $h(k)$ sont croissantes. Supposons pour cela que le capital k augmente. La condition de premier ordre par rapport à c

$$u'(f(k) + (1 - \delta)k - h(k)) = \beta v'(h(k))$$

ne peut alors être satisfaite que si $h(k)$ augmente aussi. En effet, si $h(k)$ diminuait, alors le côté droit de l'équation augmenterait, alors que le côté gauche diminuerait. Donc, la fonction $h(k)$ est croissante. Un raisonnement similaire s'applique pour montrer que $c(k)$ est croissante.

La combinaison de la condition de premier ordre et du théorème de l'enveloppe nous permet de déterminer l'état stationnaire k_{es} qui, par définition, doit vérifier $k = k' = k_{es}$ (et donc $c = c' = c_{es}$). Ainsi,

$$1 = \beta(f'(k_{es}) + 1 - \delta) \quad \text{ou} \quad f'(k_{es}) = \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta}.$$

Les hypothèses sur la fonction de production prises en section 3 assurent l'existence d'une solution unique à cette équation (concavité stricte de f , conditions d'Inada, $\beta < 1$ et $\delta > 0$). Une fois k_{es} connu, il est

possible de trouver la consommation stationnaire c_{es} , l'investissement stationnaire $i_{es} = \delta k_{es}$ et la production stationnaire $y_{es} = f(k_{es})$. Nous verrons au labo comment ces états stationnaires dépendent des paramètres.

(Remarquez que nous nous intéressons uniquement à l'état stationnaire *non-dégénéré*, c'est à dire strictement positif. En effet, il existe un état stationnaire où le capital reste égal à zéro chaque période. Mais, il n'est bien sûr pas très intéressant à étudier, et surtout il n'est atteint que si l'économie part également d'un capital nul. Tout autre valeur non-nulle pour le capital initial nous ramène à l'état stationnaire non-dégénéré k_{es} , comme nous allons le voir.)

Nous démontrons maintenant la convergence globale et monotone vers l'état stationnaire k_{es} . Pour cela, nous allons procéder en deux étapes. Nous allons d'abord montrer que le support du capital est un ensemble borné. Nous en déduisons dans un deuxième temps que la convergence est globale et monotone.

Nous donnons un argument heuristique du résultat que le capital est borné et reléguons la preuve mathématique en bas de page.¹⁹ Soit k_0 le capital initial et \bar{k} le niveau de capital tel que $f(\bar{k}) = \delta\bar{k}$, c'est à dire le niveau de capital juste suffisant pour pouvoir remplacer le capital déprécié, sans permettre ni d'augmenter le stock de capital, ni de consommer. L'existence et l'unicité de \bar{k} sont assurées par les conditions d'Inada. Il est possible de démontrer deux caractéristiques de la dynamique du capital: premièrement, si le capital k_t est plus bas que \bar{k} , alors le capital la période suivante k_{t+1} l'est également (propriété \mathcal{P}_1); deuxièmement, si le capital k_t est au-dessus de \bar{k} , alors le capital va baisser la période suivante (propriété \mathcal{P}_2). On en déduit que si $k_0 \leq \bar{k}$, alors tous les niveaux de capital futurs resteront aussi sous \bar{k} (d'après \mathcal{P}_1). Si, par contre, $k_0 > \bar{k}$, le capital baisse en première période (propriété \mathcal{P}_2). Soit le nouveau capital reste au-dessus de \bar{k} et il continuera donc de baisser, soit il passe au-dessous de \bar{k} et tous les niveaux de capital subséquents resteront sous \bar{k} . De toute façon, le capital reste donc inférieur à k_0 . On en déduit que le capital est borné par $\max\{k_0, \bar{k}\}$.

Il reste à établir la convergence globale et monotone. Nous allons voir que deux cas sont possibles. Soit l'économie croît vers l'état stationnaire en partant sous k_{es} , soit elle décroît vers l'état stationnaire en partant au-dessus de k_{es} . En effet, si $k_1 \geq k_0$, nous voyons (par récurrence) que la suite $\{k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ est croissante, puisque la fonction $k' = h(k)$ l'est également. Cette suite est bornée comme nous venons de le voir. Comme $k_0 > 0$, elle va donc atteindre une limite $k_\infty > 0$ et cette limite satisfait $k_\infty = h(k_\infty)$. Puisque l'état stationnaire (non-dégénéré) est unique, $k_{es} = k_\infty$. Ainsi, $k_t \uparrow k_{es}$. Si par contre, $k_1 < k_0$, alors la suite $\{k_t\}_{t=0}^{+\infty}$ est décroissante. Étant bornée, elle doit être convergente. Il reste à s'assurer que la limite n'est pas l'état stationnaire dégénéré, mais plutôt k_{es} . Cela est assuré par les conditions d'Inada qui impliquent que $h(\varepsilon) > \varepsilon$ pour un ε suffisamment petit. Dans ce cas, $k_t \downarrow k_{es}$.

¹⁹La propriété \mathcal{P}_1 est établie en vérifiant que pour tout t , si $k_t \leq \bar{k}$, alors $f(k_t) + (1 - \delta)k_t \leq f(\bar{k}) + (1 - \delta)\bar{k} = \bar{k}$, puisque la fonction $f(k) + (1 - \delta)k$ est croissante. Ainsi, $k_{t+1} + c_t \leq \bar{k}$ et donc $k_{t+1} \leq \bar{k}$ puisque la consommation est positive.

La propriété \mathcal{P}_2 est établie en vérifiant que $c_t = f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1} \geq 0$ et donc que $k_{t+1} - k_t \leq f(k_t) - \delta k_t$. L'étude de la fonction $f(k) - \delta k$ nous apprend que $f(k_t) - \delta k_t < 0 \iff k_t > \bar{k}$. Donc, $k_t > \bar{k} \implies k_{t+1} < k_t$.

Dans le cas où $k_0 \leq \bar{k}$, alors l'application répétée de (\mathcal{P}_1) permet de montrer que $k_t \leq \bar{k}$ pour tout t .

Dans le cas où $k_0 > \bar{k}$, nous montrons par récurrence que le capital est borné par k_0 . Il suffit pour cela de montrer que si $k_t \leq k_0$, alors $k_{t+1} \leq k_0$. Soit $k_t \leq \bar{k}$ et donc par \mathcal{P}_1 , $k_{t+1} \leq \bar{k} \leq k_0$, soit $\bar{k} < k_t \leq k_0$ et donc par \mathcal{P}_2 , $k_{t+1} < k_t \leq k_0$.

Ainsi, dans les deux cas considérés, le capital est borné, soit par k_0 , soit par \bar{k} .

6 Stationnarisation d'un problème

L'objectif d'un modèle est bien sûr de le comparer aux données. Le modèle vu jusqu'à présent converge vers un état stationnaire, alors que dans les données les séries temporelles d'intérêt, telles que consommation, investissement, PIB etc... croissent à un taux moyen positif. Même si l'intérêt du modèle est uniquement cyclique, il serait bon d'avoir un modèle compatible avec le long-terme.

Nous montrons maintenant comment il est possible de bâtir un modèle compatible avec de la croissance à long-terme, et comment il faut procéder pour le stationnariser, de façon à revenir à une structure plus proche de ce que nous venons de mettre en place.

Il y a deux sources de croissance à long-terme: croissance démographique (g_n) et progrès technologique (g). Soit N_t la population à la date t qui croît au taux g_n , donc

$$N_t = (1 + g_n)^t N_0,$$

où on peut normaliser la population $N_0 = 1$. Le progrès technologique affecte la capacité à produire à partir de niveaux de facteurs donnés et est représenté de la façon suivante:

$$Y_t = AK_t^\alpha [(1 + g)^t N_t]^{1-\alpha}.$$

Le taux de progrès technologique est donc égal à g .²⁰ Avec cette formulation, la contrainte de ressource agrégée s'écrit

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = AK_t^\alpha [(1 + g)^t N_t]^{1-\alpha},$$

où nous gardons la convention d'utiliser des lettres majuscules pour les variables agrégées.

Par contre, pour toute variable agrégée X_t , nous définissons la variable correspondante en terme individuel $x_t = \frac{X_t}{N_t} = \frac{X_t}{(1+g_n)^t}$, ainsi que la variable par unité effective de travail, $\tilde{x}_t = \frac{x_t}{(1+g)^t}$. Avec ces changements, nous allons voir comment stationnariser le problème de Ramsey.

Le problème de Ramsey est de

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad t.q. \quad C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = AK_t^\alpha [(1 + g)^t N_t]^{1-\alpha}, \quad \text{pour tout } t,$$

et $c_t, k_{t+1} \geq 0$, pour un capital K_0 donné.

Remarquez qu'avec cette spécification, nous maximisons l'utilité à horizon fini par personne. Une alternative serait de maximiser l'«utilité de toute la dynastie», i.e. la fonction d'objectif serait alors $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (1 +$

²⁰Nous aurons l'occasion de voir par la suite pourquoi le progrès technologique prend cette forme particulière ("labor-augmenting" technological progress).

$g_n)^t u(c_t)$. Il est clair que dans les deux cas, il est possible de stationnariser le problème [faites le, après avoir lu le reste de la section].

Nous commençons par travailler sur la contrainte de ressource agrégée, que nous divisons par $(1+g_n)^t(1+g)^t$ de façon à la réexprimer par unité effective de travail. Cela donne

$$\tilde{c}_t + (1 + g_n)(1 + g)\tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha.$$

Puisque le problème est désormais écrit en termes de “ \sim ”, il faut également réécrire la fonction d'utilité à maximiser en termes similaires. Pour cela, nous prenons la fonction d'utilité $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ où $\sigma > 0$. Nous aurons l'occasion par la suite de voir pourquoi nous choisissons une fonction de la sorte.²¹ Ainsi la fonction (escomptée) à maximiser se réécrit

$$\beta^t u(c_t) = \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \beta^t \frac{((1+g)^t \tilde{c}_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} = (\beta(1+g)^{1-\sigma})^t \frac{\tilde{c}_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \tilde{\beta}^t u(\tilde{c}_t),$$

après avoir défini $\tilde{\beta} = \beta(1+g)^{1-\sigma}$.

Le problème de Ramsey devient alors

$$\max_{\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \tilde{\beta}^t u(\tilde{c}_t) \quad t.q. \quad \tilde{c}_t + (1 + g_n)(1 + g)\tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha, \quad \text{pour tout } t,$$

et $\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1} \geq 0$, pour un capital par unité effective de travail $\tilde{k}_0 = K_0$ donné. Nous sommes revenus à un problème stationnaire très similaire à celui que nous avons vu précédemment. Cela nous garantit l'existence d'un état stationnaire en $\tilde{k}, \tilde{c}, \tilde{i}$ et \tilde{y} . Si $\tilde{k}_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t$ et \tilde{y}_t atteignent un état stationnaire, alors les variables individuelles k_t, c_t, i_t et y_t croissent à un taux constant égal à g . On parle alors de *sentier de croissance équilibrée* pour ces variables.²²

7 Programmation dynamique stochastique

Dans beaucoup de cas, le problème à résoudre n'est pas déterministique. Souvent, la décision doit prendre en compte un degré d'incertitude par rapport au futur. C'est le cas par exemple quand la technologie de production est sujette à des variations qui rendent la technologie en place (temporairement) plus ou moins productive. L'incertitude est alors représentée par des chocs à la fonction de production²³

$$y_t = \underbrace{z_t}_{\text{choc technologique}} \cdot \underbrace{f(h_t, k_t)}_{\text{fonction de production}}.$$

²¹ Quand $\sigma \rightarrow 1$, cette fonction d'utilité devient $u(c) = \ln c$.

²² Bien sûr, les variables agrégées K_t, C_t, I_t et Y_t croissent au taux $(1+g_n)(1+g) \approx 1+g_n+g$.

²³ La fonction de production est parfois écrite comme $e^{z_t} f(h_t, k_t)$ qui est une formulation équivalente.

Typiquement, la productivité z_t à la date t , est connue par les agents, par contre les niveaux de productivité futurs z_{t+1} , z_{t+2} , z_{t+3} ... ne sont pas connus. Cependant, les agents réalisent bien que leurs décisions maintenant et dans le futur dépendent de ces “états” de la technologie. On suppose alors que les agents connaissent les probabilités des états futurs z_{t+1} , z_{t+2} , z_{t+3} ..., conditionnellement à l’état de technologie courant z_t .

L’incertitude sur le futur, bien que souvent représentée par des chocs technologiques, peut être une incertitude sur les préférences, sur les revenus, sur la politique fiscale ou monétaire... Dans tous les cas, la façon d’approcher le problème est la même. Les agents connaissent l’état stochastique courant, mais pas les états futurs. Par contre, ils connaissent les probabilités de transition vers les états futurs.

Il est possible d’adapter l’approche de la programmation dynamique à des problèmes stochastiques. Nous n’allons pas prendre une approche formelle, mais plutôt décrire comment traiter un problème stochastique. L’intuition développée reste la même.

Soit z le vecteur des chocs courants. Pour simplifier, nous supposons que $z \in Z$, un ensemble fini. Gardant une notation similaire, nous pouvons écrire l’équation de Bellman comme

$$v(x, z) = \max_{a \in \Gamma(x, z)} u(x, a, z) + \beta E_{z'|z} [v(g(x, a, z), z')], \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } z \in Z.$$

Il y a maintenant deux variables d’état: x et z . Le processus stochastique est exogène, puisque la distribution de z' dépend de z , mais pas de l’état x ou des actions a . Le processus stochastique est dit Markovien, puisque la distribution de z' ne dépend que de la réalisation z .²⁴ Remarquez également que la distribution des z' en fonction de z est invariante au temps, ce qui est nécessaire afin de garder la nature récursive du problème.

Puisque les chocs sont tirés d’un ensemble fini, la probabilité conditionnelle $z'|z$ est caractérisée par une matrice de transition Π dont les éléments

$$\pi_{ij} = \text{Pr}(z' = z_j | z = z_i).$$

(Pour ceux intéressés par une preuve d’existence de la fonction de valeur dans ce cas, consulter Stokey-Lucas ch. 9 pour une version rigoureuse, ou Adda-Cooper (p.30) pour une version plus simple.)

7.1 Le problème de Ramsey stochastique

Nous reprenons le problème de Ramsey, mais nous ajoutons des chocs technologiques. Ainsi la productivité courante est connue, mais pas celles dans le futur. Le problème s’écrit alors:

$$v(k, z) = \max_{k' \in [0, z f(k) + (1-\delta)k]} u(z f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta E_{z'|z} [v(k', z')].$$

²⁴Ce n’est pas restrictif puisque les valeurs z_{-1} , z_{-2} ... pourraient être ajoutées au vecteur d’état stochastique.

La condition de premier ordre par rapport à k' est

$$u'(zf(k) + (1 - \delta)k - k') = \beta E_{z'|z}[v_1(k', z')], \quad \text{ou} \quad u'(c) = \beta E_{z'|z}[v_1(k', z')].$$

Intuitivement, la condition de premier ordre reflète encore le choix optimal d'investissement: le choix de k' est tel que le gain marginal de la consommation est égal au gain marginal en valeur réalisé la période prochaine, cette fois ci tenant compte que la productivité est inconnue à la date t . Nous parlons là donc du gain marginal *espéré* en valeur. Si cela n'était pas le cas, il y aurait possibilité de réoptimiser. Cependant, l'agent a optimisé ex-ante, en utilisant de façon optimale tout l'information qui lui était disponible. Ex-post, il n'y a pas de raison que sa décision ait été optimale, étant donné la réalisation de z' . Il a fait ce qui était le mieux, étant donné l'information qu'il avait (z).

Le théorème de l'enveloppe nous donne

$$v_1(k, z) = [zf'(k) + 1 - \delta] u'(zf(k) + (1 - \delta)k - k') = [zf'(k) + 1 - \delta] u'(c).$$

Écrivant cette condition la période suivante, nous obtenons

$$v_1(k', z') = [z'f'(k') + 1 - \delta] u'(c').$$

Enfin, combinant les deux conditions, nous arrivons à

$$u'(c) = \beta E_{z'|z}\{[z'f'(k') + 1 - \delta] u'(c')\}.$$

Typiquement, nous nous intéresserons aux prédictions cycliques du modèle et considérerons les variations du modèle stochastique par rapport à son état stationnaire déterministique ($z_{es} = 1$).

Et maintenant, de la pratique...

8 Discrétisation et itération sur la fonction de valeur

8.1 Principe de la méthode

Prenons le problème de croissance optimale et exprimons le sous forme traitable par la programmation dynamique. Commençons par la version non-stochastique:

$$v(k) = \max_{k' \in [0, f(k) + (1-\delta)k]} u(f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta v(k'), \quad \text{pour tout } k.$$

L'unique variable d'état du problème est le capital au début de la période, k . La variable de choix est le capital la période suivante, k' . Notez que, puisque k est connu au moment de prendre la décision, choisir k' est équivalent à choisir la consommation $c = f(k) + (1-\delta)k - k'$ ou même l'investissement $i = k' - (1-\delta)k$. *Bien sûr, ces trois choix ne sont pas indépendants.*

La condition de premier ordre sur k' est

$$u'(c) = \beta V'(k'),$$

ce qui combiné avec le théorème de l'enveloppe appliqué à k

$$V'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c),$$

donne

$$u'(c) = \beta [f'(k') + 1 - \delta]u'(c').$$

Cela est la condition d'Euler optimale usuelle qui précise que le ménage doit être indifférent entre (i) bénéficier d'un incrément de consommation supplémentaire cette période et (ii) investir un incrément supplémentaire cette période afin de bénéficier de plus de consommation la période suivante.²⁵

Puisque $V(k)$ est strictement concave, la condition d'Euler implique que la "règle de décision" $k'(k)$ est une fonction croissante. En effet, supposez le contraire. Alors, si k augmente, k' diminue et donc la consommation c doit augmenter. Cela est inconsistent avec la condition que $u'(c) = \beta V'(k')$.

²⁵Cette condition assure que des déviations d'une période à partir du plan optimal ne peuvent être optimales. Puisque ces conditions sont imposées chaque période, cela assure également que des déviations de plusieurs périodes ne peuvent être optimales non plus. Dans les cas d'un problème à horizon infini, la condition de transversalité assure que ces conditions sont également suffisantes.

Dans ce cas, supposez qu'un candidat-solution satisfait les conditions d'Euler chaque période, mais que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} > 0$, alors la solution n'est clairement pas optimale, puisque qu'à l'infini, elle laisse du capital non consommé, avec une utilité marginale de la consommation non nulle.

La méthode consiste à déterminer la fonction de valeur par itération à partir d'une conjecture initiale, suivant le théorème de l'application contractante. Cette méthode peut toujours être appliquée, mais *peut* avoir le défaut d'être lente à converger, s'il y a de nombreuses variables d'état par exemple ("curse of dimensionality"). Donc, plus le problème est simple, plus elle a un avantage comparatif! En fait, on est sûr que la méthode a converger grâce au théorème du point fixe pour une application contractante: la solution (V) à l'équation de Bellman peut être atteinte en itérant sur la fonction de valeur à partir de n'importe quelle valeur initiale V_0 ... (*Rappelez-vous que la conjecture initiale est elle-même une fonction.*)

Une fois l'environnement proprement décrit, il y a plusieurs étapes à suivre:

- (1) discrétiser le(s) variables d'états et le(s) variables de contrôle,
- (2) créer un programme qui itère sur la fonction de valeur,
- (3) générer la fonction de valeur et la ou les "règle(s) de décision".

L'étape (1) consiste à passer d'une fonction à une matrice, qui définit (approxime) la fonction en des points donnés.

8.2 Cas résolvable analytiquement

Nous commençons par un cas résolvable analytiquement. Bien sûr, il n'y a pas besoin de méthodes numériques utilisant un ordinateur dans ce cas. Cependant, cela nous permettra de voir le parallèle entre cette résolution analytique et la méthode d'itération sur la fonction de valeur à l'aide de l'ordinateur. Et surtout le passage à l'ordinateur est nécessaire car la résolution analytique n'est possible précisément que dans le cas que nous voyons maintenant.

L'environnement est le suivant:

L'économie est caractérisée par un ménage et une firme représentatifs. Les marchés sont compétitifs. Nous commençons par supposer par simplicité que la fonction d'utilité est $u(c) = \ln c$. Cela implique entre autre que l'offre de travail est inélastique puisque le ménage représentatif ne souffre pas de désutilité du travail (*prouvez cela dans la cas statique*). L'utilité est escomptée à un taux $\beta \in (0, 1)$. Les firmes utilisent une technologie $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Le capital est déprécié au taux $\delta \in (0, 1]$.

Dans cette section, supposons que la dépréciation est complète ($\delta = 1$). Rappelons-nous de la section 2.2 que la fonction de valeur du problème à horizon fini est affine en $\ln k$. Conjeturons donc que $v(k) = a + b \ln k$. Le problème est de voir si cette conjecture peut être vérifiée, et si oui, quelle valeurs nous obtenons pour (a, b) . Il faut donc vérifier que ce candidat satisfait l'équation de Bellman du problème

$$v(k) = \max_{k' \in [0, f(k)]} \ln(k^\alpha - k') + \beta v(k'), \quad \text{pour tout } k.$$

Si c'est le cas, alors

$$v(k) = \max_{k'} \ln(k^\alpha - k') + \beta[a + b \ln k'].$$

La condition de premier ordre sur k' est

$$\frac{1}{k^\alpha - k'} = \frac{\beta b}{k'} \quad \text{ou} \quad k' = \frac{\beta b}{1 + \beta b} k^\alpha.$$

Remarquez que cela exprime bien une *règle de décision*, puisque cela exprime la variable de contrôle k' en fonction de la variable d'état k . Donc, si notre conjecture $v(k) = a + b \ln k$ est correcte, alors la *règle de décision* $k' = \frac{\beta b}{1 + \beta b} k^\alpha$ l'est également.

A partir de cette *règle de décision*, on peut vérifier si notre conjecture pour $v(k)$ est correcte ou pas. En effet, substituons cette fonction dans l'équation de Bellman afin d'obtenir

$$\begin{aligned} v(k) &= \ln(k^\alpha - \frac{\beta b}{1 + \beta b} k^\alpha) + \beta[a + b \ln(\frac{\beta b}{1 + \beta b} k^\alpha)], \\ &= \ln(\frac{1}{1 + \beta b} k^\alpha) + \beta[a + b \ln(\frac{\beta b}{1 + \beta b} k^\alpha)], \\ &= -\ln(1 + \beta b) + \alpha \ln k + \beta a + \beta b \ln(\frac{\beta b}{1 + \beta b}) + \beta b \alpha \ln(k). \end{aligned}$$

Regroupant les termes, nous obtenons que

$$\begin{cases} a = -\ln(1 + \beta b) + \beta a + \beta b \ln(\frac{\beta b}{1 + \beta b}) \\ b = \alpha + \beta b \alpha. \end{cases}$$

Il est immédiat que $b = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$. Par conséquent, $1 + \beta b = \frac{1}{1 - \alpha\beta}$ et $\frac{\beta b}{1 + \beta b} = \alpha\beta$ donc,

$$a(1 - \beta) = \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln(\alpha\beta).$$

Par conséquent,

$$a = \frac{1}{1 - \beta} [\ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln(\alpha\beta)].$$

Les coefficients trouvés pour a et b sont les seuls qui nous permettent de partir de la fonction de valeur pour arriver à la règle de décision puis, à partir de cette dernière, de revenir à la fonction de valeur. Substituant la valeur trouvée pour b dans la *règle de décision*, on trouve finalement

$$k' = \alpha\beta k^\alpha \quad \text{et donc} \quad c = (1 - \alpha\beta)k^\alpha,$$

le même résultat qu'en section 2.3.

Remarquez qu'une alternative serait d'itérer analytiquement sur la fonction de valeur en utilisant l'équation de Bellman. Faites la pour le labo: commencez par $v_{(0)}(k) = 0$, en déduire la règle de décision $k'_{(0)}(k)$ et donc $v_{(1)}(k)$. A partir de là, trouvez $k'_{(1)}(k)$, puis $v_{(2)}(k)$... (comment passez-vous de $v_{(j)}(k)$ à $k'_{(j)}(k)$ et de $k'_{(j)}(k)$ à $v_{(j+1)}(k)$?). Continuez jusqu'à être en mesure de postuler une forme générale pour la règle de décision. Vérifiez que cette dernière est correcte.

Il est important ici de récapituler comme nous avons procédé "à la main", puisque la méthode par itération sur la fonction de valeur utilise la même approche dans des cas plus généraux qui n'ont pas de solution analytique:

- (1) nous avons commencé par conjecturer une fonction de valeur,
- (2) nous en avons dérivé une *règle de décision*,
- (3) substituant cette *règle de décision* dans l'équation de Bellman, nous avons trouvé une expression qui ne dépend que de k , dont nous nous sommes servie pour extraire les coefficients a et b , puisque cette équation doit être vérifiée pour tout k .

La méthode d'itération sur la fonction de valeur procède de façon (relativement) similaire, puisque:

- (1) nous commencerons par une conjecture (quelconque) pour la fonction de valeur $v(k)$,
- (2) nous l'utiliserons pour trouver une *règle de décision* $k'(k)$,
- (3) à ce point, nous ne pourrions confirmer que la conjecture est correcte - analytiquement, nous avons en quelque sorte triché puisque nous avons directement utilisé la bonne conjecture.
- (4) nous pourrions cependant utiliser la règle de décision trouvée pour ajuster notre conjecture initiale pour v ... et recommencer le processus jusqu'à converger vers une fonction de valeur et donc une *règle de décision*.
- (5) nous savons que ce processus converge, grâce au théorème du point fixe pour une application contractante.
- (6) l'intérêt est que l'on convergera *quel que soit la conjecture initiale*.

8.3 Cas général

Nous revenons au cas général où $\delta < 1$.

Nous avons vu en section 5 que le capital est borné par $\max\{k_0, \bar{k}\}$, où $f(\bar{k}) = \delta\bar{k}$. Cela implique que le problème à résoudre est implicitement borné (puisque $k \geq 0$) et donc que les résultats sur l'existence d'une fonction de valeur de la section 4.3 tiennent. Cela va aussi permettre de borner notre problème d'itération.

On a le problème à résoudre

$$v(k) = \max_{k' \in [0, \bar{k}]} \ln(f(k) + (1 - \delta)k - k') + \beta v(k').$$

Nous allons procéder comme suit. Nous itérerons sur la fonction de valeur en cherchant sur une grille pour la variable d'état k et pour la variable de contrôle k' .

- on crée une grille de valeurs possibles pour le capital avec N_k éléments, $\{k_1, k_2, \dots, k_{N_k}\}$. Bien sûr, le choix de la taille de la grille est important. Une grille plus fine (avec plus de points) donne une meilleure approximation, mais le temps de calcul est plus long. Dans un problème simple, ce n'est pas vraiment un gros problème, mais dans un problème plus compliqué, le choix de la taille de la grille implique un compromis entre ces deux «tensions».

- ensuite, on conjecture une fonction de valeur $v^0(k)$. Puisque v^0 est une fonction, elle est approximée par un vecteur de dimension $N_k \times 1$ - dont les éléments sont $v^0(k_i)$, $i = 1, \dots, N_k$.

- à partir de cette conjecture, v^1 peut être obtenue à partir de v^0 comme²⁶

$$v^1(k) = \max_{k'} u(f(k) + (1 - \delta)k - k') + \beta v^0(k').$$

En pratique, v^1 est approximée à partir de N_k points comme v^0 , et donc

$$v^1(k_i) = \max_{k_j \in \{k_1 \dots k_{N_k}\}} u(f(k_i) + (1 - \delta)k_i - k_j) + \beta v^0(k_j).$$

- nous pouvons alors comparer la conjecture initiale v^0 et la fonction de valeur nouvellement itérée v^1 ; en pratique, cela se fait en comparant, les éléments du vecteur $(v^0(k_1), \dots, v^0(k_{N_k}))^T$ et ceux du vecteur $(v^1(k_1), \dots, v^1(k_{N_k}))^T$.

- il y a de grandes chances que les deux fonctions (les deux vecteurs) ne soient pas très proches, et donc que la conjecture soit incorrecte... dans ce cas, on utilise la fonction v^1 comme notre nouvelle conjecture et on répète le procédé pour obtenir une nouvelle fonction $v^2(k)$.

- on répète le procédé ainsi tant que les deux itérations successives sur la fonction de valeur sont “trop” éloignées.

- à la $n^{\text{ième}}$ itération, on a ainsi déterminé $v^{n-1}(k)$ et $v^n(k)$; on sait qu’avec un n suffisamment large, ce procédé va converger, c’est à dire v^{n-1} et v^n peuvent être aussi proche que désiré.

Remarquez bien que cette méthode est globale (c’est à dire ne repose pas sur une approximation uniquement valable autour d’un point particulier, généralement l’état stationnaire), contrairement à d’autres méthodes que nous verrons par la suite. Mais, comme déjà mentionné, elle peut avoir du mal à converger, si le nombre de variables d’état devient grand.

8.4 Implémentation de l’algorithme sur MATLAB

Voir programme Ramsey.m

Quelques petits “trucs”:

- Trouver une bonne conjecture initiale pour v_0 peut aider à accélérer la convergence. Toutefois, dans des problèmes simples, cela n’est pas indispensable.
- Vérifiez que la règle de décision n’est pas contrainte par les bornes de la grille de la variable d’état. Si vous trouvez que votre choix pour k' tombe sur k_{N_1} ou k_{N_k} , il y a peut-être un problème.
- Vérifiez que la tolérance utilisée comme critère de convergence n’est pas trop large. Si vous la variez un peu et trouvez des résultats très différents, il y a sûrement un problème.
- Vérifiez que la taille de la grille (N_k) est suffisamment grande, en la faisant varier.

Interprétation des itérations sur la fonction de valeur:

²⁶Cette équation est à mettre en parallèle avec l’opérateur de Bellman

$$Th(x) = \max_a u(x, a) + \beta h(g(x, a)).$$

Typiquement, on prend $v_0 = 0$, puisque de toute façon, nous allons converger quelle que soit la conjecture initiale. Si l'on prenait $v_0 = \ln(k^\alpha + (1 - \delta)k)$, alors v_0 serait optimal à partir de la dernière période (dans le contexte d'un modèle à horizon fini), v_1 serait optimal à partir de la période précédente... et on convergerait vers la solution optimale quand l'horizon est infini...

Quelques petits exercices simples: (*soit pour détecter des erreurs dans le programme, soit pour vérifier par rapport à l'intuition.*)

- Faire varier les paramètres de l'environnement, tels que les paramètres de préférence et de technologie.
- Vérifier la convergence sur le sentier de transition.

Voir le site d'Eric Sims pour une description de la méthode d'interpolation qui permet d'accélérer la précision de l'approximation sans augmenter le temps de convergence ou la taille de la grille.

8.5 Le problème de Ramsey avec un variable "statique"

Prenons le problème de Ramsey et ajoutons à l'environnement l'hypothèse que dorénavant les préférences dépendent du loisir. Cela implique bien sûr que l'offre de travail n'est plus inélastique, et donc que les heures de travail sont une décision du ménage. Dans le cadre de la programmation dynamique, cela implique qu'il faille déterminer une règle de décision supplémentaire, $h(k)$.

Remarquez que, même avec une offre de travail endogène, l'équilibre reste efficace et nous pouvons donc continuer à résoudre le problème optimal. Ce dernier s'écrit comme

$$v(k) = \max_{k', h} u(f(h, k) + (1 - \delta)k - k', 1 - h) + \beta v(k').$$

Les conditions de premier ordre sont

$$\begin{cases} u_1(c, 1 - h) = \beta v'(k'), \\ f_1(h, k) \cdot u_1(c, 1 - h) = u_2(c, 1 - h), \end{cases}$$

ce qui combiné avec le théorème de l'enveloppe appliqué à k donne

$$\begin{cases} u_1(c, 1 - h) = \beta(f_2(h', k') + 1 - \delta)u_1(c', 1 - h'), \\ f_1(h, k) \cdot u_1(c, 1 - h) = u_2(c, 1 - h). \end{cases}$$

Remarquez qu'étant donné k' , cela implique un choix statique de h : le choix de h n'influence pas directement l'évolution de la variable d'état (et n'apparaît pas dans la deuxième partie de l'équation de Bellman). En fait, étant donné (k, k') , l'offre de travail h est implicitement définie. En effet, définissez

$$\sigma(k, k') = \max_h u[f(h, k) + (1 - \delta)k - k', 1 - h]$$

et

$$h = \phi(k, k') \text{ la valeur qui maximise.}$$

Intuitivement, nous allons définir h comme une fonction implicite de k et de k' . Ainsi, pour un niveau de capital k donné, nous allons chercher l'investissement optimal k' tenant en compte que h sera "choisi en même temps". Vu autrement, la condition de premier ordre $f_1.u_1 = u_2$ est une condition nécessaire du problème. Ainsi, $\phi(k, k')$ caractérise l'emploi optimal pour un (k, k') donné et $\sigma(k, k')$ est l'utilité (optimisée au point de vue des heures de travail) pour un (k, k') donné. Donc,

$$v(k) = \max_{k'} \sigma(k, k') + \beta v(k').$$

La règle de décision pour l'investissement tirée de ce problème est $k'(k)$ et donc la règle de décision pour les heures de travail est $h(k) = \phi(k, k'(k))$.

En pratique, à moins que la condition de premier ordre soit résolvable analytiquement, il faut là aussi itérer sur la fonction de valeur.

Voir RamseyHeures.m.

8.6 Le problème de Ramsey stochastique

Nous allons considérer que la source de variation aléatoire provient d'un choc technologique, car c'est le cas le plus courant. Cependant, l'approche est la même pour d'autres types de chocs.

Le problème s'écrit alors:

$$v(k, z) = \max_{h, k'} u(zf(h, k) + (1 - \delta)k - k', 1 - h) + \beta E_{z'|z}[v(k', z')].$$

Pour pouvoir résoudre le problème, il faut définir la loi de transition pour le processus stochastique z . Ce dernier est supposé être une variable aléatoire discrète et bornée, et suivre un processus Markovien de premier ordre (cela implique que la réalisation de z à la date $t + 1$ ne dépend que de la réalisation à la date t .) De fait, la productivité courante sera suffisante pour prédire l'évolution stochastique de la productivité sur l'horizon infini. La matrice de transition pour les chocs (qui fait partie de l'environnement) est donnée par une matrice Π de dimension $N_z \times N_z$, où N_z représente le nombre de réalisations possibles de la variable z . Ainsi,

$$\Pi = (\pi_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N_z} \quad \text{où } \pi_{ij} = \Pr ob(z_{t+1} = z_j | z_t = z_i).$$

L'élément π_{ij} représente la probabilité de transiter de la productivité z_i à la productivité z_j . Remarquez que le problème reste borné, il suffit pour cela de prendre \bar{k} solution de $\bar{k} = z_{N_z} f(1, \bar{k}) + (1 - \delta) \bar{k}$, en supposant que les chocs ont été ordonnés dans l'ordre croissant.

Le processus d'itération est le même que précédemment dans le principe. Il faut bien sûr tenir compte du fait qu'il y a maintenant deux variables d'état, et que les valeurs futures sont prises en expectation. Également, les règles de décision sont maintenant fonction des deux états, i.e. $h = h(k, z)$ et $k' = k'(k, z)$. De façon

pratique, cela implique que la fonction de valeur sur laquelle l'algorithme converge est maintenant une matrice de dimension $N_k \times N_z$.

Remarquez que ce problème peut potentiellement souffrir de la “curse of dimensionality”.

Exercice: écrire un programme sur MATLAB basé sur la méthode d'itération sur la fonction de valeur dans le cas du problème de Ramsey stochastique. Faites cela dans le cas où $u(c) = \ln c$.

Remarquez que dans le cas du travail élastique ($u = u(c, 1 - h)$), on pourrait faire comme en section 8.5 et commencer par résoudre pour les fonctions implicites $\sigma(z, k, k')$ et $\phi(z, k, k')$ sur l'ordinateur.

Les règles de décision devraient avoir des caractéristiques dues aux désirs (1) de substituer intertemporellement et (2) de lisser la consommation. En effet, comment comprendre intuitivement la réaction de la consommation et du travail aux chocs de productivité? En substituant intertemporellement, le ménage voudra travailler plus lorsque la productivité est temporairement plus élevée. A cause des effets de revenu et de substitution opposés, la réponse de l'emploi aux chocs sera d'autant plus faible que les chocs seront plus persistents. Puisque le ménage veut également lisser sa consommation, il ajustera celle-ci sur toute les périodes. Par contre, plus le choc est persistant, plus la consommation réagira.

9 Modèle d'industrie

Voir acétates “Acétates modèle d'industrie”.

10 Problème linéaire quadratique

Nous considérons ici un cas particulier, celui où la fonction d'utilité est quadratique et où la fonction de transition est linéaire. Dans ce cas, les règles de décision sont linéaires. Bien que cela ne corresponde pas aux caractéristiques typiques des problèmes que nous allons voir dans ce cours, il est toujours possible d'approximer la fonction d'utilité (autour de l'état stationnaire) par une fonction quadratique pour profiter de ce résultat.

Nous commençons par montrer qu'un tel problème produit bien des règles de décisions linéaires. Nous expliquons par la suite comment faire pour utiliser ce résultat dans le cas de problèmes non-quadratiques.

Le problème est de choisir des actions $\{a_t\}_{t=0}^{+\infty}$ afin de maximiser l'utilité sur horizon infini que l'on écrit

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (x_t^T \cdot R \cdot x_t + a_t^T \cdot Q \cdot a_t),$$

où x_t est un vecteur de variables d'état de dimension $n \times 1$, a_t est un vecteur d'actions de décisions $q \times 1$, R est une matrice $n \times n$, symétrique et négative semi-définie, Q est une matrice $q \times q$, symétrique et négative semi-définie. La notation T représente la transposée. La loi de transition du vecteur d'état est

$$x_{t+1} = X \cdot x_t + A \cdot a_t, \quad \text{pour tout } t, x_0 \text{ donné,}$$

où X est une matrice $n \times n$ et A une matrice $n \times q$. Ainsi posé, le problème est effectivement de nature “linéaire quadratique”.

Conjeturons que la fonction de valeur est elle-même quadratique, i.e que $V(x) = x^T.V.x$, où V est une matrice $n \times n$, symétrique et négative semi-définie. Résoudre l'équation de Bellman consiste donc à déterminer V . Utilisons la loi de transition pour éliminer la variable d'état de la période suivante et obtenons

$$x^T.V.x = \max_a \{x^T.R.x + a^T.Q.a + \beta(X.x + A.a)^T.V.(X.x + A.a)\}.$$

La condition de premier ordre de ce problème est (utilisant la symétrie des matrices)²⁷

$$Q.a + \beta A^T.V.X.x + \beta A^T.V.A.a = 0,$$

et donc une règle

$$a = F.x,$$

où $F = -\beta[Q + \beta A^T.V.A]^{-1}.A^T.V.X$. La règle de décision est bien linéaire.²⁸

Quand le problème est stochastique, la fonction à maximiser est

$$E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (x_t^T.R.x_t + a_t^T.Q.a_t),$$

et la loi de transition est

$$x_{t+1} = X.x_t + A.a_t + \epsilon_{t+1}, \quad \text{pour tout } t.$$

Le terme stochastique est un vecteur $n \times 1$ de variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées à travers le temps, qui suit une distribution normale avec une espérance nulle et une matrice de variance-covariance $E(\epsilon_t \epsilon_t^T) = \Sigma$. Il peut être démontré (voir Sargent et Ljungqvist, chapitre 4) que, dans le problème stochastique, la règle de décision est aussi linéaire et qu'en plus, elle prend la même expression que dans le cas déterministique vu ci-dessus.²⁹ Ce résultat est dénommé le “Certainty equivalence principle”: la règle de décision qui satisfait le problème stochastique est la même que celle qui satisfait le problème déterministique. Celle-ci est indépendante des caractéristiques du processus stochastique. Cela n'est le cas toutefois que sous les conditions mentionnées: fonction d'objectif quadratique, loi de transition linéaire et le fait que $E(\epsilon_{t+1}|x_t) = 0$.

²⁷Nous utilisons les résultats suivants:

$$\begin{cases} \frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T)x, \\ \frac{\partial y^T B z}{\partial y} = Bz, \\ \frac{\partial y^T B z}{\partial z} = B^T y. \end{cases}$$

²⁸Remettre cette expression dans la fonction à maximiser donnerait une équation matricielle (non-linéaire) en V . Sargent-Ljungqvist (ch. 4) explique comment procéder. Nous ne considérons pas cette extension, puisque le résultat que nous allons exploiter est que la règle de décision est linéaire.

²⁹SL montre même que la fonction de valeur $V(x) = x^T.V.x + d$ où d est une constante qui dépend de Σ et V satisfait la même équation que dans le cas déterministique.

Comme mentionné, les implications du certainty equivalence principe peuvent être utilisées pour un problème non-quadratique, pourvu que le problème soit approximé comme un problème quadratique. Voici une approche générale pour y parvenir:

Considérons le problème suivant

$$\max_{\{a_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t r(z_t) \quad t.q. \quad x_{t+1} = X.x_t + A.a_t + C.w_{t+1},$$

où $\{w_{t+1}\}$ est un vecteur de perturbations *i.i.d.* d'espérance zéro et de variance finie et $r(z_t)$ est une fonction concave de z_t ($z^T \equiv (x_t \ a_t)$). Toutes les non-linéarités du problème apparaissent dans la fonction $r(z_t)$. L'appendice B du chapitre 4 de SL esquisse comment procéder. Cela consiste principalement à approximer la fonction r par une forme quadratique $\hat{r}(z) = z^T M z$. La matrice M est obtenue à partir d'un développement en séries de Taylor du second ordre de la fonction R autour de l'état stationnaire.

En annexe (section 23), nous indiquons une méthode générale et détaillée pour résoudre les problèmes linéaires quadratiques.

Quelles sont les bonnes conditions pour appliquer la méthode LQ?: quand le problème à résoudre n'a pas de non-linéarité forte.³⁰ Dans certains cas, les implications sur le bien-être peuvent être faussées, si une approximation du premier ordre des règles de décisions n'est pas précise.³¹

11 Comment utiliser le travail simulé? Modèle cyclique RBC.

11.1 Points généraux de méthode

L'approche générale est que le modèle cyclique qui va être mis en place doit aussi être consistant avec le comportement de l'économie sur le long-terme, en particulier sur les régularités empiriques de la croissance économique. Bien que nous stationnarisons le modèle, cela va quand même influencer la calibration. Ainsi, le modèle mis en place pour expliquer le cycle (court-terme) utilise des paramètres choisis pour reproduire le comportement de l'économie en croissance (long-terme).³² Malgré tout, le modèle sera testé sur sa capacité à reproduire des faits cycliques.

Certains de ces faits stylisés sur la croissance sont appelés les faits de Kaldor ("Kaldor facts"), basés sur des observations à travers le temps et à travers pays.:

- Le PIB réel croît à un taux plus ou moins constant,
- le stock de capital croît à un taux à un taux plus ou moins constant, plus élevé que le taux de croissance du travail,

³⁰Par exemple, la méthode n'est pas appropriée pour un problème "asset pricing" avec de l'aversion au risque.

³¹Voir Schmitt-Grohé et Uribe (JEDC, 2004), "Perturbation methods lecture notes" (Schmitt-Grohé et Uribe), Judd (Handbook of Computational Economics, vol. 1, ch. 12, 1996).

³²Sauf pour le processus stochastique, bien sûr.

- les taux de croissance du PIB et du capital sont à peu près les mêmes,
- le taux de profit sur le capital a une tendance horizontale.

Les faits #3 et 4 impliquent que la part des revenus allant au capital est constante. Les faits #2 et 3 impliquent que le ratio de l'investissement sur le PIB est constant. Les faits #1-4 sont consistents avec une économie sur un sentier de croissance équilibrée.

Les ingrédients de base vont être: (i) des chocs à la production maintenant et dans le futur, et (ii) deux décisions qui vont réagir à ce processus stochastique: un choix travail/loisir et un investissement. Un ménage va ajuster son offre de travail en réponse à un choc. Il fera de même avec l'investissement - cette dernière décision impliquera un lien intertemporel entre deux périodes consécutives, puisque que l'investissement une période affecte le capital de départ la période suivante. Ces décisions reflèteront aussi un désir de lisser la consommation, puisque les utilités sont concaves en consommation.

11.2 Calibration

Ces notes sont tirées de Krueger.

Nous revenons à l'environnement décrit en section 6.³³ En gardant les notations de cette section, le problème était de

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad t.q. \quad C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = AK_t^\alpha [(1 + g)^t n_t]^{1-\alpha}, \quad \text{pour tout } t,$$

et $c_t, k_{t+1} \geq 0$, pour un capital K_0 donné. Définissant la variable correspondante en terme individuel $x_t = \frac{X_t}{n_t} = \frac{X_t}{(1+g_n)^t}$, ainsi que la variable par unité effective de travail, $\tilde{x}_t = \frac{x_t}{(1+g)^t}$. Avec ces changements, nous obtenons

$$\max_{\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \tilde{\beta}^t u(\tilde{c}_t) \quad t.q. \quad \tilde{c}_t + (1 + g_n)(1 + g)\tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha,$$

pour tout t , et $\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1} \geq 0$, pour un capital par unité effective de travail $\tilde{k}_0 = K_0$ donné - où $\tilde{\beta} = \beta(1 + g)^{1-\sigma}$. Cela est dû à l'hypothèse que l'utilité appartient à la famille "constant relative risk aversion"³⁴ (CRRA, $u(c) = c^{1-\sigma}/(1 - \sigma)$, $\sigma > 0$ et $u(c) = \ln c$ quand $\sigma = 1$. Nous aurons l'occasion bientôt de voir pourquoi nous restreignons les préférences à cette famille.³⁵

Maintenant que l'environnement est stationnarisé, nous pouvons utiliser la programmation dynamique. L'équation de Bellman correspondant au problème est

$$v(\tilde{k}_t) = \max_{\tilde{k}_{t+1}} \left\{ u(\tilde{c}_t) + \tilde{\beta}v(\tilde{k}_{t+1}) \right\} \quad t.q. \quad \tilde{c}_t + (1 + g_n)(1 + g)\tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha.$$

³³Nous réitérons la remarque faite en section 6, à savoir qu'avec cette spécification, nous maximisons l'utilité à horizon fini par personne. Une alternative serait de maximiser l'«utilité de toute la dynastie», i.e. la fonction d'objectif serait alors $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (1 + g_n)^t u(c_t)$. La calibration serait légèrement différente, bien sûr.

³⁴Pour cette classe de fonctions, le coefficient d'aversion relative au risque $-cu''(c)/u'(c) = \sigma$.

³⁵Appliquant la règle de l'Hôpital, on a que pour tout $c > 0$, $\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \rightarrow \ln c$ quand $\sigma \rightarrow 1$.

La CPO $[\tilde{k}_{t+1}]$ et le théorème de l'enveloppe sont

$$\begin{cases} (1+g)(1+g_n)u'(\tilde{c}_t) = \tilde{\beta}v'(\tilde{k}_{t+1}), \\ v'(\tilde{k}_t) = u'(\tilde{c}_t)(A\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\tilde{k}_t), \end{cases}$$

ce qui nous donne l'équation d'Euler

$$(1+g)(1+g_n)u'(\tilde{c}_t) = \tilde{\beta}u'(\tilde{c}_{t+1})(A\alpha\tilde{k}_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta).$$

Cela correspond au cas sans progrès technologique et sans accroissement de la population - sauf pour le terme $(1+g)(1+g_n)$ bien sûr.

Nous cherchons le *sentier de croissance équilibré*, c'est à dire où les variables \tilde{x}_t sont constantes (impliquant que la variable correspondante x_t varie au taux g). L'équation d'Euler implique alors que

$$(1+g)(1+g_n) = \tilde{\beta}[A\alpha(\tilde{k}^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta].$$

Nous dénotons désormais $\beta = \frac{1}{1+\rho}$. Après quelques manipulations, nous obtenons

$$(1+g)^\sigma(1+g_n)(1+\rho) = A\alpha(\tilde{k}^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta,$$

et finalement

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{A\alpha}{(1+g)^\sigma(1+g_n)(1+\rho) - 1 + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Si $u(c) = \ln c$ et donc $\sigma = 1$, et si les taux de croissance (g, g_n) et le taux d'escompte ρ sont faibles, nous pouvons approximer

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{A\alpha}{\rho + g + g_n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Par conséquent, $\tilde{y}^* = A(\tilde{k}^*)^\alpha$ et $\tilde{i}^* = (\delta + g + g_n)\tilde{k}^*$ [vérifiez le] et $\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - \tilde{i}^*$ [vérifiez le]. Par conséquent, toutes les variables d'allocation par personne (k, y, i et c) croissent à un taux constant égal à g (voir fait de Kaldor #3).

(Exercice: est-ce que les prix des facteurs croissent le long du sentier de croissance équilibré?)

Nous voulons maintenant calibrer le modèle, c'est à dire choisir les valeurs des paramètres du modèle. Puisque le modèle sera utilisé pour étudier le cycle, nous calibrons sans essayer de répliquer de faits cycliques. Nous commençons par lister et catégoriser les paramètres à calibrer:

$$\begin{cases} \text{Préférences:} & \rho, \sigma, \\ \text{Technologie:} & \delta, A, \alpha, g, \\ \text{Démographie:} & g_n. \end{cases}$$

Il faut également choisir la durée de la période de référence, typiquement le trimestre (parfois l'année). Donc, nous choisirons le trimestre. La calibration sera aussi basée sur les États-Unis.

Le taux de croissance de la population g_n est le même que le taux de croissance de la population active (en termes du marché de l'emploi) dans le modèle. Il est de 1.1% en moyenne aux E.U. Donc, $(1 + g_n)^4 = 1.011$ ou $g_n = 1.011^{1/4} - 1 = 0.27\%$.

Le taux de croissance moyen du PIB réel par personne (1947-2004) est de 2.2%, résultant en $g = 1.022^{1/4} - 1 = 0.55\%$.

Le paramètre α de la fonction de production Cobb-Douglas représente dans le modèle la part des revenus qui vont au capital, et donc $(1 - \alpha)$ la part qui va au travail.³⁶ Nous choisissons donc $\alpha = 1/3$.

Sur le sentier de croissance équilibré, $\tilde{i}^*/\tilde{k}^* = \delta + g + g_n$. D'après la définition, il en est de même du ratio I/K et donc du ratio $(I/Y)/(K/Y)$. Et donc,

$$\delta = \frac{I/Y}{K/Y} - g - g_n.$$

Aux E.U., le ratio moyen $I/Y = 25\%$ tandis que le ratio annuel $K/Y = 2.6$. Comme K est un stock, tandis que Y (et I) sont des flux, le ratio K/Y trimestriel est $2.6 * 4 = 10.4$. Ainsi,

$$\delta = \frac{0.25}{10.4} - 0.0027 - 0.0055 = 1.6\%.$$

Le choix de la constante technologique A est vraiment une normalisation du modèle. C'est parce que augmenter A d'une proportion quelconque ne fait qu'augmenter toutes les autres variables de la même proportion - sauf le taux d'intérêt bien sûr. Nous choisissons donc $A = 1$. (*Montrez le comme exercice.*)

En ce qui concerne les préférences, deux paramètres sont à choisir. Nous montrons en appendice pourquoi se restreindre à la famille de fonctions d'utilité CRRA. Cela revient à choisir un paramètre σ . A partir du modèle, il n'y a pas de façon évidente de choisir ce paramètre, car il affecte le sentier de transition vers l'état stationnaire, mais pas l'état stationnaire lui-même. Les études micro (σ est aussi l'élasticité de substitution intertemporelle - voir appendice) donne un intervalle assez large d'estimation. Nous choisissons $\sigma = 1$ qui est consistant avec ces estimations. Dans ce cas, et puisque le taux d'intérêt réel est égal au produit marginal net de la dépréciation, l'équation d'Euler écrite à l'état stationnaire nous donne

$$\rho + g + g_n = r^*.$$

Avec une valeur annuelle $r^* = 4\%$, nous obtenons $\rho = 0.18\%$.

Remarque 1: La calibration des paramètres d'un modèle dépend toujours de ce modèle. Il n'est pas toujours bon d'utiliser les paramètres calibrés à partir d'un certain modèle et de les utiliser dans un autre.

³⁶La part des revenus au travail (capital) est par définition $\frac{w}{y} (\frac{rk}{y})$. Avec des marchés compétitifs, la part du travail (capital) est donc $\frac{f_1(h,k)h}{f(h,k)} (\frac{f_2(h,k)k}{f(h,k)})$. Avec une fonction Cobb-Douglas, elle est égale à $(1 - \alpha)$ pour le travail, et donc α pour le capital. L'observation des ces parts sur le long-terme indique une valeur constante autour de $\alpha = 1/3$ (et ceci, bien que les prix relatifs des facteurs aient augmenté).

Remarque 2: Certaines calibrations sont obtenues à partir d'un modèle bâti sans croissance. Les paramètres calibrés à partir de ce modèle seraient bien sûr différents de ce que nous avons obtenu. Rigoureusement parlant, il faudrait procéder comme nous l'avons fait jusqu'ici. Cependant, il n'est pas rare de trouver des calibrations obtenues à partir d'un modèle sans croissance. Certains paramètres de notre calibration changeraient, mais pas tous. Voici ce qu'on obtiendrait avec ou sans croissance - pour les paramètres qui changeraient:

<i>avec croissance</i>	<i>sans croissance</i>	<i>progrès tech.</i>
$g = 0.55\%$	$g = 0\%$	$g = 0.55\%$
$g_n = 0.27\%$	$g_n = 0\%$	$g_n = 0\%$
$\delta = 1.6\%$	$\delta = 2.4\%$	$\delta = 1.87\%$
$\rho = 0.18\%$	$\rho = 1\%$	$\rho = 0.45\%$

Comment procéder si l'on inclut de la désutilité du travail (comme nous l'avons dit, le choix travail/loisir est central dans les modèles cycliques)? La fonction de production $Y_t = AK_t^\alpha [(1+g)^t n_t h_t]^{1-\alpha}$ et, puisque $\sigma = 1$, la fonction d'utilité $u(c, 1-h) = \ln c + B \ln(1-h)$ (*pourquoi cette forme particulière?: voir l'appendice*). Attention, nous ne stationnarisons pas la variable h_t puisque le travail est borné ($h_t \in [0, 1]$).³⁷ Par contre, sur le chantier de croissance équilibré, h_t sera constant et égal à h^* . Dans ce cas, le problème

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}, h_t\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t) \quad t.q. \quad C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = AK_t^\alpha [(1+g)^t n_t h_t]^{1-\alpha}, \quad \text{pour tout } t,$$

peut se réécrire³⁸

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}, h_t\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (\ln \tilde{c}_t + B \ln(1-h_t)) \quad t.q. \quad \tilde{c}_t + (1+g_n)(1+g)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha h_t^{1-\alpha}, \quad \text{pour tout } t,$$

c'est à dire sous forme de programmation dynamique,

$$v(\tilde{k}_t) = \max_{\tilde{k}_{t+1}, h_t} \left\{ \ln \tilde{c}_t + B \ln(1-h_t) + \beta v(\tilde{k}_{t+1}) \right\} \quad t.q. \quad \tilde{c}_t + (1+g_n)(1+g)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t = A\tilde{k}_t^\alpha h_t^{1-\alpha}.$$

Les CPOs de ce problème, combiné avec le théorème de l'enveloppe, donnent

$$\begin{cases} \frac{(1+g_n)(1+g)}{\tilde{c}_t} = \beta \frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} [A\alpha \tilde{k}_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta], \\ A(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha h_t^{-\alpha} \frac{1}{\tilde{c}_t} = \frac{B}{1-h_t}. \end{cases}$$

A l'état stationnaire, nous obtenons

$$\begin{cases} (1+g_n)(1+g)(1+\rho) = A\alpha(\tilde{k}^*)^{\alpha-1}(h^*)^{1-\alpha} + 1 - \delta, \\ \frac{A(1-\alpha)(\tilde{k}^*)^\alpha (h^*)^{-\alpha}}{A(\tilde{k}^*)^\alpha (h^*)^{1-\alpha} - (\delta+g+g_n)\tilde{k}^*} = \frac{B}{1-h^*}. \end{cases}$$

La méthodologie de calibration est très similaire à ce que nous avons vu précédemment et les paramètres restent les mêmes. Il nous reste donc juste à calibrer le nouveau paramètre B , le poids du loisir dans l'utilité

³⁷Nous savons aussi que le travail est constant au long-terme, quelque soit le niveau de productivité.

³⁸Quand $\sigma = 1$, $\tilde{\beta} = \beta$.

du ménage. Empiriquement, les ménages travaillent 1/3 de leur temps discrétionnaire et donc, $h^* = 1/3$. Ainsi, nous avons un système à résoudre en \tilde{k}^* et B . On trouve alors $B = 1.34$.

Remarque 1: Ainsi, la calibration vient, soit du fait que les paramètres choisis reproduisent le comportement au long-terme de l'économie, soit d'études microéconomiques. En aucun cas, nous ne calibrons afin de reproduire des faits cycliques.

Remarque 2: en appendice, nous justifions les restriction sur la technologie et les préférences.

Remarque 3: nous y introduisons également un concept d'équilibre (dit équilibre compétitif récursif), dont la formulation suit la nature récursive des problèmes analysés et qui est donc pratique quand on utilise la programmation dynamique.

11.3 Calibration du processus stochastique $\{z_t\}$

Le processus stochastique doit être déterminé également. Soit la fonction de production

$$y_t = A_t k_t^\alpha [(1+g)^t h_t]^{1-\alpha},$$

où

$$A_t = A e^{z_t} \quad \text{et} \quad z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Le terme ε_t est un choc aléatoire, tiré chaque période d'une d'une distribution normale d'espérance zéro et de variance σ_ε^2 , chocs indépendants et identiquement distribués. Ainsi, le paramètre ρ représente la persistance de la productivité.

En prenant le logarithme de la fonction de production, nous obtenons

$$\ln y_t = \ln A_t + \alpha \ln k_t + (1-\alpha)[\ln h_t + t \ln(1+g)],$$

ou

$$\ln A_t = \ln y_t - \alpha \ln k_t - (1-\alpha) \ln h_t - (1-\alpha)t \ln(1+g).$$

Puisqu'on peut mesurer y_t (PIB réel par personne),³⁹ h_t (heures de travail par personne), k_t (capital par personne) et g (le taux moyen de croissance du PIB réel par personne), on peut en inférer une série $\{\ln A_t\}$, conditionnellement à une valeur pour α . On obtient ainsi ce qu'on appelle les "résidus de Solow".

Puisque $\ln A_t - \ln A = z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t = \rho(\ln A_{t-1} - \ln A) + \varepsilon_t$, alors

$$\ln A_t = (1-\rho) \ln A + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Si l'on régresse la relation

$$\ln A_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln A_{t-1} + \varepsilon_t,$$

³⁹Population civile de plus de 16 ans, «non-institutionnalisée» (prison/hôpital/maison de retraite).

alors le coefficient estimé $\hat{\alpha}_2$ sera l'estimation pour ρ . Avec les résidus de l'estimation $\hat{\varepsilon}_t = \ln A_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \ln A_{t-1}$, on obtient l'estimation suivante pour $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \hat{\varepsilon}_t^2$. Avec des données U.S. trimestrielles, on obtient $\rho = 0.95$ et $\sigma_\varepsilon = 0.007$.⁴⁰ Remarquez que, comme auparavant le coefficient A n'est qu'une normalisation des unités.

11.4 Discrétisation du processus stochastique

Il est souvent utile de discrétiser un processus stochastique continu $\{z_t\}$. Nous indiquons ici une méthode très répandue pour discrétiser le processus AR(1).

Soit un processus stochastique:

$$\lambda_{t+1} = (1 - \rho)\mu_\lambda + \rho\lambda_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

On peut toujours réécrire le processus de façon à ce qu'il ait une espérance nulle, i.e. $\omega = \lambda - \mu_\lambda$. Dans ce cas, on a

$$\omega_{t+1} = \rho\omega_t + \varepsilon_t.$$

Donc, approximer le process λ revient à approximer le processus ω . L'approche consiste à remplacer le processus stochastique par une chaîne de Markov (*voir l'appendice pour une introduction aux chaînes de Markov*). Dénotons cette chaîne $\tilde{\omega}$ et les valeurs qu'elle prend par $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n\}$. La matrice de transition $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $p_{ij} = \Pr(\tilde{\omega}_{t+1} = \tilde{\omega}_j | \tilde{\omega}_t = \tilde{\omega}_i)$.

Tauchen (1986) propose la méthode suivante. Soit $\Pr(\varepsilon_t \leq \bar{\varepsilon}) \equiv G(\bar{\varepsilon}) = \Phi(\bar{\varepsilon}/\sigma_\varepsilon)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. Prenez les valeurs $\tilde{\omega}_i$ de telle façon que $\tilde{\omega}_n$ soit une multiple m de l'écart-type inconditionnel⁴¹ $\sigma_\varepsilon/\sqrt{1 - \rho^2}$, c'est à dire $\tilde{\omega}_n = m\sigma_\varepsilon/\sqrt{1 - \rho^2}$ et prenons $\tilde{\omega}_1 = -\tilde{\omega}_n$. Finalement, répartissez $\{\tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_{n-1}\}$ de façon à ce que tous les intervalles entre deux points consécutifs soient égaux. Soit d la longueur de cet intervalle. Alors,

$$p_{ij} = \Pr(\tilde{\omega}_{t+1} = \omega_j | \tilde{\omega}_t = \omega_i) = \Pr(\tilde{\omega}_j - d/2 < \rho\tilde{\omega}_i + \varepsilon_t < \tilde{\omega}_j + d/2) = \Pr(\tilde{\omega}_j - d/2 - \rho\tilde{\omega}_i < \varepsilon_t < \tilde{\omega}_j + d/2 - \rho\tilde{\omega}_i).$$

⁴⁰Il est à noter que différents auteurs utilisent des méthodes légèrement différentes dans les détails, bien que similaires dans les grandes lignes. Cela consiste toujours à partir de la fonction de production Cobb-Douglas, à en déduire le résidu technologique, et à utiliser cela pour estimer le processus stochastique. Les différences proviennent de la façon d'éliminer la tendance dans le résidu technologique.

Par exemple, Eric Sims part d'une fonction $y_t = a_t f(h_t, k_t)$, en déduit une série $\ln \hat{a}_t = \ln y_t - \alpha \ln k_t - (1 - \alpha) \ln h_t$. Ensuite, il enlève la tendance à la croissance, parce qu'il est supposé «implicitement» qu'une tendance linéaire est présente dans les données. Donc, il régresse d'abord $\ln \hat{a}_t = \phi_0 + \phi_1 t + u_t$ et ensuite $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$. (*Cette approche a le défaut que l'approche empirique ne parallèle pas exactement le modèle théorique, qui n'a pas de tendance exogène à la croissance.*)

Krusell part d'un modèle théorique avec croissance, et filtre les données (plus là-dessus bientôt), avant d'estimer le processus stochastique.

⁴¹ $Var(\omega) = Var(\varepsilon)/(1 - \rho^2)$ car $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$.

Alors, pour tout $1 < j < n - 1$, et pour tout i ,

$$p_{ij} = \Phi[(\tilde{\omega}_j + d/2 - \rho\tilde{\omega}_i)/\sigma_\varepsilon] - \Phi[(\tilde{\omega}_j - d/2 - \rho\tilde{\omega}_i)/\sigma_\varepsilon].$$

Pour les bornes inférieure et supérieure, choisissez

$$\begin{cases} p_{i1} = \Phi[(\tilde{\omega}_1 + d/2 - \rho\tilde{\omega}_i)/\sigma_\varepsilon], \\ p_{in} = 1 - \Phi[(\tilde{\omega}_n - d/2 - \rho\tilde{\omega}_i)/\sigma_\varepsilon]. \end{cases}$$

Tauchen (1986) recommande $m = 3$ et $n = 9$.

Voir `tauchen.m`.

Pour un exemple de simulation d'une chaîne de Markov, voir `markov.m`.

11.5 Filtre HP

Nous sommes intéressés à analyser les prédictions cycliques du modèle. Par cycle, nous entendons les fluctuations autour de la tendance des séries temporelles considérées dans les données. En même temps, nous allons utiliser les variations du modèle par rapport à son état stationnaire déterministique ($\varepsilon = 0$, $z^* = 0$). Il faut donc dégager le cycle de la tendance à la fois sur les données et sur les séries correspondantes générées par les simulations du modèle. Une façon populaire, mais pas la seule, de procéder est le filtre Hodrick-Prescott.⁴²

Pour une introduction à la méthode, voir l'appendice. Le fichier `HPfilter.m` implémente le filtre.

Nous voulons décomposer la série $\{\ln y_t\}$ en une tendance $\{\ln y_t^{tend}\}$ et une composante cyclique $\{\ln y_t^{cycle}\}$ telles que

$$\ln y_t = \ln y_t^{tend} + \ln y_t^{cycle}.$$

Le filtre HP est ainsi appliqué au logarithme des séries considérées. Nous dénotons donc $\hat{y}_t = \ln y_t$, $\hat{y}_t^T = \ln y_t^{tend}$ et $\hat{y}_t^C = \ln y_t^{cycle}$.

Comment est-ce que le filtre HP détermine la tendance et le cycle? Il minimise une "fonction de perte"

$$\min_{\{\hat{y}_t^T\}_{t=1}^\tau} \sum_{t=1}^\tau (\hat{y}_t - \hat{y}_t^T)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{\tau-1} [(\hat{y}_{t+1}^T - \hat{y}_t^T) - (\hat{y}_t^T - \hat{y}_{t-1}^T)]^2$$

qui pénalise la variabilité de la composante cyclique, tout en pénalisant également les variations abruptes dans le terme de tendance.

⁴²Voir aussi Baxter et King (1999): "Measuring business cycles: approximate BP filters for economic times series".

11.6 Représenter les faits et les stats du modèle

11.6.1 Que regarde-t-on?

(1) On peut regarder l'amplitude des fluctuations pour considérer leurs magnitudes relatives. (2) On peut aussi regarder la corrélation entre une variable et le PIB réel pour voir si cette variable est pro-cyclique ou contre-cyclique. (3) Enfin, on peut regarder les corrélations croisées à différentes périodes pour déterminer si les variables précèdent ou suivent le cycle (lead-lag indicators).

(On peut aussi regarder la réponse des variables endogènes à un choc. Cela se fait par l'intermédiaire d'une fonction de réponse impulsionnelle (impulse response function, IRF). Pour cela, on suppose que l'économie est initialement à l'état stationnaire déterministique (avant $t = 0$) et qu'à $t = 0$ l'économie reçoit un choc positif de la taille d'un écart type, i.e. $z_0 = \sigma_\varepsilon$. Par la suite, il n'y a aucun choc additionel et donc $z_t = \rho z_{t-1}$.)

L'écart type de la série filtrée est une mesure de la volatilité de cette série. La corrélation contemporaine d'une série avec le PIB réel est une mesure de la cyclicalité de cette série. L'auto-corrélation de premier ordre d'une série mesure sa persistance.⁴³

Quand on compare la volatilité de deux séries, comment s'assurer que la mesure de volatilité est invariante à l'échelle?⁴⁴ Supposez par exemple que deux séries stationnaires $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ soient proportionnelles, i.e. $y_t = \psi x_t$ pour tout t . Dénotant les écart-types par σ , alors $\sigma_y = \psi \sigma_x$. Une façon de faire est de diviser chaque série par sa moyenne μ . Alors, $\sigma_{(x/\mu_x)} = \sigma_x / \mu_x = (\psi / \mu_y) \sigma_x = (\psi / \mu_y) (\sigma_y / \psi) = \sigma_y / \mu_y = \sigma_{(y/\mu_y)}$.

Mais alors, comment faire pour une série non-stationnaire? Supposez que vous ayez une série non-stationnaire $\{x_t\}$ et que vous la filtriez. Vous obtenez alors une tendance $\{x_t^T\}$ et une composante cyclique $\{x_t^C\}$, i.e. $x_t^C = x_t - x_t^T$. Alors, pour éviter des "effets d'échelle" sur la partie cyclique qui nous intéresse, plutôt que de diviser par la moyenne, divisez par la tendance. L'écart-type pourcentage est

$$\% \sigma_{x^C} = 100 * \sigma_{(x^C/x^T)}.$$

Cela suggère la façon de procéder suivante (remarquez que $\frac{x_t^C}{x_t^T} = \frac{x_t - x_t^T}{x_t^T} \approx \ln x_t - \ln x_t^T$ lorsque x_t est proche de x_t^T):

⁴³Voici quelques définitions. Soit une série $\{x_t\}_{t=1}^T$. Sa moyenne est

$$\mu_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t.$$

Son écart-type est

$$\sigma_x = \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \mu_x)^2 \right]^{1/2}.$$

Les coefficients d'autocorrélation sont donnés par

$$autocorr(x_t, x_{t-i}) = \frac{1}{T-i} \sum_{i=1}^{T-i} (x_t - \mu_x)(x_{t-i} - \mu_x) / \sigma_x^2.$$

Le fichier autocor.m calcule auto-corrélations et corrélations croisées.

⁴⁴Ce point vient de Jonathan Heathcote.

- prenez le logarithme de la série de départ, $v_t = \ln x_t$,
- filtrez cette série, i.e. $v_t = v_t^C + v_t^T$,
- calculez l'écart-type de cette série «loguée» et filtrée, $100 * \sigma_{vc}$. C'est en général appelé le “percentage standard deviation of x_t ”.

Remarques:

- (1) La méthode ci-dessus est l'approche traditionnelle. Cela est parfois rapporté à la même mesure, mais pour le PIB.
- (2) Les deux approches ne donnent pas exactement le même résultat puisque: (i) le logarithme est approximé et (ii) le logarithme de la tendance n'est pas la tendance du logarithme.
- (3) Nous devons filtrer des données qui ne sont pas stationnaires. Même si le modèle est stationnaire, il est cependant préférable d'appliquer le même filtre aux séries simulées, de façon à traiter les deux séries de manière cohérente.

11.6.2 Qu'y voit-on?

L'objectif est de comparer les données aux performances du modèle. Une bonne source est la table 1.1, au chapitre 1 du livre de T. Cooley pour les données U.S.⁴⁵ Le tableau suivant résume les principaux faits pour la période 1954-1991:

Variable x_t	Std Dev	Corr (x_{t-1}, y_t)	Corr (x_t, y_t)	Corr (x_{t+1}, y_t)
GNP (y_t)	1.72%	.85	1.00	.85
Consumption:				
Non-Durables & Services	.86%	.78	.77	.64
Investment	5.34%	.82	.90	.81
Non-Farm Hours	1.59%	.74	.86	.82
Productivity (GNP/Hours)	.90%	.33	.41	.19

L'amplitude des fluctuations en PIB et en heures sont similaires, d'où l'importance de bien comprendre le marché du travail. La consommation est la plus lisse des séries, et l'investissement est celle qui varie le plus. La productivité est légèrement procyclique, mais varie moins que le PIB.

Cela peut être comparé aux mêmes mesures telles que simulées par le modèle. Pour générer les statistiques simulées:

- on génère les séries,
- on “logue” les séries,
- on filtre les séries pour en extraire le cycle,⁴⁶

⁴⁵Eric Sims (*Calibration and Quantitative Evaluation of RBC*, sur son site) fournit une table pour une période différente, mais qui contient le même message.

⁴⁶Ainsi, les simulations du modèle sont traitées comme les données.

- on génère les statistiques.
- on fait cela un grand nombre de fois (100), chaque simulation durant le même nombre de périodes que dans les données considérées,⁴⁷ et on prend la moyenne.

Nous reportons les résultats du modèle calibré et simulé du chapitre 1 du livre de T. Cooley (table 1.2):

Variable x_t	Std Dev	Corr (x_{t-1}, y_t)	Corr (x_t, y_t)	Corr (x_{t+1}, y_t)
GNP	1.35%	.70	1.00	.70
Consumption:				
Non-Durables & Services	.33%	.72	.84	.50
Investment	5.95%	.66	.99	.71
Non-Farm Hours	.77%	.65	.99	.72
Productivity	.61%	.73	.98	.65

La question qui a motivé au départ la littérature «real business cycle» (RBC) était la suivante: si l'on suppose que l'économie est parfaitement compétitive, quelle proportion des variations en output peut être expliquée par des ajustements optimaux à des chocs réels à la capacité à produire de l'économie?

Dans l'économie artificielle, le PIB fluctue moins qu'aux États-Unis, mais une large proportion vient des chocs réels. L'investissement est très volatile, dans les données et dans les simulations. Toutes les séries sont pro-cycliques. Ce n'est pas surprenant, puisqu'il n'y a qu'une seule source de chocs. Le modèle ne réussit pas très bien au niveau des heures, ce qui implique que la modélisation du marché du travail devrait être ajustée. De même, la consommation n'est pas suffisamment volatile par rapport aux données.⁴⁸

Analyse des mécanismes du modèle: Il y a plusieurs canaux de propagation des chocs. Ceux-ci affectent la capacité à produire de l'économie et le ménage représentatif modifie ses décisions en fonction du choc. Comme l'utilité est concave - le ménage est averse au risque, le ménage lisse sa consommation à travers le temps. Ainsi, une variation de l'output se traduit par une variation à la fois de la consommation et de l'investissement. Comme les agents lissent leur consommation, l'investissement est plus volatile que la consommation. Bien sûr, les variations d'investissement affecte la production dans le futur. Ainsi, l'effet des chocs est également transmis à travers le temps. Finalement, les ménages substituent le loisir à travers périodes, en réponse à une variation des salaires cette période.

Il est intéressant de souligner le rôle de l'accumulation du capital. En effet, supposez que le PIB ne soit fonction que du travail. Dans ce cas, le problème du ménage devient statique. Supposez qu'un choc positif agisse sur l'économie. L'output y_t et le salaire w_t augmentent proportionnellement et le changement en z_t a le même effet que un changement permanent de productivité: l'effet de revenu et de substitution s'annulent,

⁴⁷Il est commun de «jeter» les quelques premières observations pour chaque simulation, afin de se débarrasser de la dépendance aux valeurs initiales. Cependant, le modèle produit toujours le bon nombre d'observations.

⁴⁸Eric Sims (*Calibration and Quantitative Evaluation of RBC*, sur son site) fournit une critique plus détaillée des modèles RBC, et des efforts qui ont été faits pour remédier à certaines faiblesses.

h_t reste constant et c_t augmente comme w_t . Avec du capital cependant, l'investissement augmenterait (et la consommation n'augmenterait pas autant). Il est efficace de réduire la consommation et d'augmenter les heures par rapport au cas où il n'y a pas d'investissement.

Il est aussi intéressant de discuter comment la persistance des chocs affecte le modèle. Supposez que $\rho = 0$. Prenez un choc unique (et temporaire). Le produit marginal du travail augmente cette période, et le ménage a un coût d'opportunité du loisir particulièrement élevé cette période. Bien qu'il y ait des effets de revenu et de substitutions opposés, les préférences ont été choisies de telle façon que ces effets s'annulent à la suite d'une augmentation permanente du salaire réel. L'implication est que le travail doit augmenter à la suite d'un changement temporaire de la productivité. Avec un choc temporaire, l'effet de revenu est plus faible, et il y a une plus grande incitation à substituer intertemporellement, puisque le salaire courant est élevé par rapport au salaire futur. En net, la réponse du travail amplifie le choc. Les gens doivent décider que faire avec le revenu supplémentaire. Comme l'utilité marginale de la consommation est décroissante, il ne pourrait être optimal de consommer le surplus en une période, et donc la consommation augmente maintenant et dans le futur.

Quand il y a de la corrélation entre chocs successifs ($\rho > 0$), le même mécanisme est en place, mais les effets durent plus à travers le temps. Puisque la productivité va probablement rester plus élevée sur les périodes à venir, il est optimal d'augmenter l'investissement. Le travail répond aussi au choc, amplifiant le choc.

12 Log-linéarisation: méthode des coefficients indéterminés

Une autre méthode consiste à transformer un système d'équations de différences non-linéaires (les conditions de premier ordre) en l'approximant par un système linéaire. Cette approximation se fait en log-linéarisant les CPO autour de l'état stationnaire.

Remarquez que cette méthode est locale puisque les approximations ne sont valides qu'autour de l'état stationnaire. De même, l'approximation se fait à partir d'un développement du premier ordre (d'autres méthodes que nous verrons par la suite se basent sur un développement du second ordre.)

La log-linéarisation permet de tout exprimer en termes de déviations (en pourcentage) par rapport à l'état stationnaire et donc conduit à une interprétation naturelle des résultats.

Nous commençons par l'exemple simple du problème de Ramsey stochastique. Nous regarderons ensuite le cas du modèle RBC de Hansen. Pour finir, nous décrirons la «boîte à outils d'Uhlig» (*Uhlig's toolkit*) qui permet de résoudre des environnements assez généraux à peu de frais.⁴⁹

⁴⁹Avant de commencer, notons qu'il y a plusieurs approches basées sur la log-linéarisation des conditions de premier ordre. Par exemple, la méthode de Blanchard et Kahn pour une approximation du premier ordre. Pour une méthode basée sur une approximation du second ordre, voir la méthode des perturbations (perturbation method), ainsi que le logiciel DYNARE, deux approches que nous verrons par la suite.

La méthode exposée dans ce chapitre consiste à log-linéariser les CPOs autour de l'état stationnaire et à résoudre pour les règles de décisions linéaires en utilisant la méthode des coefficients indéterminés (*method of undetermined coefficients*). Cette méthode s'accommode parfaitement à la résolution de problèmes d'équilibre.

Avant de procéder avec deux exemples, nous commençons par décrire brièvement la procédure générale:

- trouver les conditions d'équilibre,
- choisir les paramètres et calculer l'état stationnaire,
- log-linéariser ces conditions,
- résoudre pour les règles de décisions par la méthode des coefficients indéterminés.

12.1 Application au problème de Ramsey stochastique

Prenons le problème de croissance optimale avec les préférences $u(c) = (c^{1-\sigma} - 1)/(1 - \sigma)$ et la technologie $y = zk^\alpha$.

Attention: Nous allons suivre l'approche d'Uhlig qui dénote la variable d'état *capital au début de la période* k_{t-1} au lieu de k_t . Avec cette convention, la date en index représente toujours le moment où la variable a été choisie et réfère à l'information disponible au moment où la décision a été prise. En particulier, seules les équations comportant des termes en $t + 1$ ont des opérateurs d'expectation.

Nous pouvons dériver les conditions d'équilibre suivantes:

$$\begin{cases} c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = z_t k_{t-1}^\alpha, & (\text{contrainte de ressource}) \\ R_t = \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta, & (\text{rendement du capital}) \\ E_t[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^\sigma R_{t+1}] = 1, & (\text{Euler intertemporel}) \\ \ln z_t = (1 - \rho) \ln z^* + \rho \ln z_{t-1} + \varepsilon_t, & (\text{processus stochastique}) \end{cases}$$

où $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

L'état stationnaire est donné par le système

$$\begin{cases} c^* + \delta k^* = z^* (k^*)^\alpha, \\ R^* = \alpha z^* (k^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta, \\ \beta R^* = 1, \\ z^* = 1. \end{cases}$$

Il est immédiat que $R^* = 1/\beta$, $k^* = [\alpha\beta/(1 - \beta(1 - \delta))]^{1/((1-\alpha))}$ et $c^* = [(1 - \beta(1 - \delta) - \alpha\beta\delta)/(\alpha\beta)]k^*$.

Commençons maintenant par log-linéariser les quatre conditions d'équilibre. Pour toute variable x_t , nous allons définir

$$\widehat{x}_t = \ln(x_t/x^*).$$

Suffisamment près de l'état stationnaire, $\ln(x_t/x^*) = \ln(1 + \frac{x_t - x^*}{x^*}) \approx \frac{x_t - x^*}{x^*}$. Ainsi, \hat{x}_t représente la déviation en pourcentage de x_t par rapport à son état stationnaire. La définition de \hat{x}_t implique que

$$x_t = x^* e^{\hat{x}_t}.$$

Un développement du premier ordre nous donne

$$x_t \approx x^*(1 + \hat{x}_t).$$

La contrainte de ressource

$$\begin{aligned} & c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = z_t k_{t-1}^\alpha, \\ \implies & c^* e^{\hat{c}_t} + k^* e^{\hat{k}_t} - (1 - \delta)k^* e^{\hat{k}_{t-1}} = z^* e^{\hat{z}_t} (k^* e^{\hat{k}_{t-1}})^\alpha, \\ \implies & c^* e^{\hat{c}_t} + k^* e^{\hat{k}_t} - (1 - \delta)k^* e^{\hat{k}_{t-1}} = z^* (k^*)^\alpha e^{\hat{z}_t + \alpha \hat{k}_{t-1}}, \\ \implies & c^*(1 + \hat{c}_t) + k^*(1 + \hat{k}_t) - (1 - \delta)k^*(1 + \hat{k}_{t-1}) \approx y^*(1 + \hat{z}_t + \alpha \hat{k}_{t-1}), \\ \implies & c^* \hat{c}_t + k^* \hat{k}_t - (1 - \delta)k^* \hat{k}_{t-1} \approx y^*(\hat{z}_t + \alpha \hat{k}_{t-1}), \\ \implies & \hat{c}_t + \frac{k^*}{c^*} \hat{k}_t - \left(\frac{\alpha y^* + (1 - \delta)k^*}{c^*} \right) \hat{k}_{t-1} \approx \frac{y^*}{c^*} \hat{z}_t, \\ \implies & \hat{c}_t + \frac{k^*}{c^*} \hat{k}_t - \frac{k^*}{c^*} R^* \hat{k}_{t-1} - \frac{y^*}{c^*} \hat{z}_t \approx 0. \end{aligned}$$

La consommation est plus élevée ($\hat{c}_t > 0$) quand le capital ou la productivité sont au-dessus de leurs "moyennes" ($\hat{k}_{t-1} > 0$ ou $\hat{z}_t > 0$). Par contre, plus d'investissement ($\hat{k}_t > 0$) réduit la consommation.

Le rendement du capital

$$\begin{aligned} & R_t = \alpha z_t k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta, \\ \implies & R^* e^{\hat{R}_t} = \alpha z^* e^{\hat{z}_t} (k^* e^{\hat{k}_{t-1}})^{\alpha-1} + 1 - \delta, \\ \implies & R^* e^{\hat{R}_t} = \alpha z^* (k^*)^{\alpha-1} e^{\hat{z}_t + (\alpha-1)\hat{k}_{t-1}} + 1 - \delta, \\ \implies & R^*(1 + \hat{R}_t) \approx \alpha z^* (k^*)^{\alpha-1} [1 + \hat{z}_t + (\alpha - 1)\hat{k}_{t-1}] + 1 - \delta, \\ \implies & R^* \hat{R}_t \approx \alpha \frac{y^*}{k^*} [\hat{z}_t - (1 - \alpha)\hat{k}_{t-1}], \\ \implies & \hat{R}_t - \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} [\hat{z}_t - (1 - \alpha)\hat{k}_{t-1}] \approx 0. \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt est plus élevé ($\hat{R}_t > 0$) quand la productivité est plus élevée ou le capital plus bas.

L'équation intertemporelle d'Euler

$$\begin{aligned} & E_t \left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\sigma R_{t+1} \right] = 1, \\ \implies & E_t \left[\beta \left((c^* e^{\hat{c}_t}) / (c^* e^{\hat{c}_{t+1}}) \right)^\sigma R^* e^{\hat{R}_{t+1}} \right] = 1, \\ \implies & E_t \left[(e^{\hat{c}_t} / e^{\hat{c}_{t+1}})^\sigma e^{\hat{R}_{t+1}} \right] = 1, \\ \implies & E_t \left[e^{\sigma(\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1}) + \hat{R}_{t+1}} \right] = 1, \\ \implies & E_t \left[1 + \sigma(\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1}) + \hat{R}_{t+1} \right] \approx 1, \\ \implies & E_t \left[\sigma(\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1}) + \hat{R}_{t+1} \right] \approx 0. \end{aligned}$$

Des taux d'intérêt élevés en anticipation coïncident avec une augmentation de la consommation en anticipation.

Finalement, le processus stochastique

$$\begin{aligned}
& \ln z_t = (1 - \rho) \ln z^* + \rho \ln z_{t-1} + \varepsilon_t, \\
\implies & \widehat{z}_t + \ln z^* = (1 - \rho) \ln z^* + \rho(\widehat{z}_{t-1} + \ln z^*) + \varepsilon_t, \\
\implies & \widehat{z}_t = \rho \widehat{z}_{t-1} + \varepsilon_t, \\
\implies & \widehat{z}_t - \rho \widehat{z}_{t-1} - \varepsilon_t = 0.
\end{aligned}$$

Nous récapitulons en regroupant les quatre conditions d'équilibre linéarisées

$$\begin{cases}
\widehat{c}_t + \frac{k^*}{c^*} \widehat{k}_t - \frac{k^*}{c^*} R^* \widehat{k}_{t-1} - \frac{y^*}{c^*} \widehat{z}_t \approx 0, \\
\widehat{R}_t - \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} [\widehat{z}_t - (1 - \alpha) \widehat{k}_{t-1}] \approx 0, \\
E_t[\sigma(\widehat{c}_t - \widehat{c}_{t+1}) + \widehat{R}_{t+1}] \approx 0, \\
\widehat{z}_t - \rho \widehat{z}_{t-1} - \varepsilon_t = 0.
\end{cases}$$

Nous cherchons à approximer les règles de décision autour de l'état stationnaire, c'est à dire à exprimer \widehat{c}_t et \widehat{k}_t (ainsi que le rendement \widehat{R}_t) en fonction des variables d'état \widehat{k}_{t-1} et \widehat{z}_t . Le système suivant nous permet de faire cela. Remarquez que la loi de transition des chocs est nécessaire, puisqu'une des conditions est vraie en expectation seulement. Remarquez également qu'à partir de leurs définitions respectives, résoudre pour les variables en pourcentage \widehat{x}_t est équivalent à résoudre pour les variables en niveau x_t .

Nous allons postuler des relations linéaires entre $(\widehat{c}_t, \widehat{k}_t, \widehat{R}_t)$ et $(\widehat{k}_{t-1}, \widehat{z}_t)$,

$$\begin{cases}
\widehat{c}_t = \mu_{ck} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz} \widehat{z}_t, \\
\widehat{k}_t = \mu_{kk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz} \widehat{z}_t, \\
\widehat{R}_t = \mu_{Rk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{Rz} \widehat{z}_t,
\end{cases}$$

puis résoudre pour les "coefficients indéterminés". Nous allons ainsi substituer les relations postulées ci-dessus dans les conditions d'équilibre et tenir en compte pour la condition intertemporelle que $E_t[\widehat{z}_{t+1}] = \rho \widehat{z}_t$.

Le principe de la méthode est que chaque équation doit être vraie pour tout $(\widehat{k}_{t-1}, \widehat{z}_t)$. On va donc réécrire chacune en ne gardant que les termes en \widehat{k}_{t-1} et \widehat{z}_t , et ainsi obtenir des conditions sur les coefficients.

La contrainte de ressource $\widehat{c}_t + \frac{k^*}{c^*} \widehat{k}_t - \frac{k^*}{c^*} R^* \widehat{k}_{t-1} - \frac{y^*}{c^*} \widehat{z}_t = 0$ peut être réécrite

$$\mu_{ck} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz} \widehat{z}_t + \frac{k^*}{c^*} (\mu_{kk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz} \widehat{z}_t) - \frac{k^*}{c^*} R^* \widehat{k}_{t-1} - \frac{y^*}{c^*} \widehat{z}_t = 0.$$

Comme nous utilisons des règles de décision, cette expression doit être vraie pour tout \widehat{k}_{t-1} et tout \widehat{z}_t , ce qui impose des restrictions sur les coefficients à déterminer. Plus spécifiquement, après regoupement des coefficients, nous obtenons que

$$\begin{cases}
\mu_{ck} + \frac{k^*}{c^*} \mu_{kk} - \frac{k^*}{c^*} R^* = 0, \\
\mu_{cz} + \frac{k^*}{c^*} \mu_{kz} - \frac{y^*}{c^*} = 0.
\end{cases}$$

Nous pouvons exprimer les coefficients de \widehat{c}_t en fonction des coefficients de \widehat{k}_t , i.e.

$$\begin{cases} \mu_{ck} = \frac{k^*}{c^*}(R^* - \mu_{kk}), \\ \mu_{cz} = \frac{y^*}{c^*} - \frac{k^*}{c^*}\mu_{kz}. \end{cases}$$

L'équation du rendement $\widehat{R}_t - \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} [\widehat{z}_t - (1 - \alpha)\widehat{k}_{t-1}] = 0$ peut être réécrite

$$\mu_{Rk}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{Rz}\widehat{z}_t - \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} [\widehat{z}_t - (1 - \alpha)\widehat{k}_{t-1}] = 0.$$

Après égalisation des coefficients, nous obtenons

$$\begin{cases} \mu_{Rk} = -\alpha(1 - \alpha) \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*}, \\ \mu_{Rz} = \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*}. \end{cases}$$

L'équation intertemporelle $E_t[\sigma(\widehat{c}_t - \widehat{c}_{t+1}) + \widehat{R}_{t+1}] = 0$ peut être réécrite

$$E_t[\sigma(\mu_{ck}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz}\widehat{z}_t - \mu_{ck}\widehat{k}_t - \mu_{cz}\widehat{z}_{t+1}) + \mu_{Rk}\widehat{k}_t + \mu_{Rz}\widehat{z}_{t+1}] = 0.$$

Puisque $E_t[\widehat{z}_{t+1}] = \rho\widehat{z}_t$, nous simplifions comme

$$\sigma[\mu_{ck}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz}\widehat{z}_t - \mu_{ck}\widehat{k}_t - \rho\mu_{cz}\widehat{z}_t] + \mu_{Rk}\widehat{k}_t + \rho\mu_{Rz}\widehat{z}_t = 0.$$

Ensuite, nous réécrivons \widehat{k}_t en fonction de \widehat{k}_{t-1} et \widehat{z}_t pour obtenir

$$\sigma[\mu_{ck}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz}\widehat{z}_t - \mu_{ck}(\mu_{kk}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz}\widehat{z}_t) - \rho\mu_{cz}\widehat{z}_t] + \mu_{Rk}(\mu_{kk}\widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz}\widehat{z}_t) + \rho\mu_{Rz}\widehat{z}_t = 0.$$

et finalement

$$\begin{cases} \sigma(\mu_{ck} - \mu_{ck}\mu_{kk}) + \mu_{Rk}\mu_{kk} = 0, \\ \sigma(\mu_{cz} - \mu_{ck}\mu_{kz} - \rho\mu_{cz}) + \mu_{Rk}\mu_{kz} + \rho\mu_{Rz} = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons réarranger

$$\begin{cases} (\mu_{Rk} - \sigma\mu_{ck})\mu_{kk} + \sigma\mu_{ck} = 0, \\ (\mu_{Rk} - \sigma\mu_{ck})\mu_{kz} + (1 - \rho)\sigma\mu_{cz} + \rho\mu_{Rz} = 0. \end{cases}$$

Nous avons exploité toutes les équations d'équilibre et pouvons commencer à résoudre pour les coefficients des règles de décision. Comme nous avons déterminé μ_{Rk} et connaissons μ_{ck} en fonction de μ_{kk} , la première équation du système ci-dessus est de fait une équation du second ordre à résoudre,

$$(\mu_{Rk} - \sigma \frac{k^*}{c^*} (R^* - \mu_{kk}))\mu_{kk} + \sigma \frac{k^*}{c^*} (R^* - \mu_{kk}) = 0,$$

ce qui donne

$$\sigma \frac{k^*}{c^*} \mu_{kk}^2 + [\mu_{Rk} - \sigma \frac{k^*}{c^*} (1 + R^*)]\mu_{kk} + \sigma \frac{k^*}{c^*} R^* = 0,$$

et donc

$$\mu_{kk}^2 - [1 + R^* - \mu_{Rk} \frac{c^*}{\sigma k^*}] \mu_{kk} + R^* = 0,$$

ou

$$\mu_{kk}^2 - [1 + R^* + \alpha(1 - \alpha) \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} \frac{c^*}{\sigma k^*}] \mu_{kk} + R^* = 0.$$

Cette équation peut être exprimée comme

$$\mu_{kk}^2 - \gamma \mu_{kk} + \frac{1}{\beta} = 0,$$

où $\gamma = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta(1-\delta))(1-\beta(1-(1-\alpha)\delta))}{\alpha\beta\sigma}$. On peut vérifier tout de suite que cette équation a deux racines réelles distinctes, l'une inférieure et l'autre supérieure à 1.⁵⁰ Pour un système stable, il faut garder la racine inférieure à 1 et donc

$$\mu_{kk} = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{\beta}}.$$

Nous finissons les calculs en remarquant que puisque μ_{kk} est connu, $\mu_{ck} = \frac{k^*}{c^*}(R^* - \mu_{kk})$ l'est également. Deux coefficients restent à être déterminés, (μ_{cz}, μ_{kz}) qui sont solution de

$$\begin{cases} \frac{k^*}{c^*} \mu_{kz} + \mu_{cz} - \frac{y^*}{c^*} = 0, \\ (\mu_{Rk} - \sigma \mu_{ck}) \mu_{kz} + (1 - \rho) \sigma \mu_{cz} + \rho \mu_{Rz} = 0, \end{cases}$$

deux équations obtenues préalablement. Ce système est linéaire en (μ_{cz}, μ_{kz}) .

Bien que les calculs analytiques soient un peu lourds, ils peuvent dans le principe être faits à la main et des solutions uniques existent. Cependant, cela ne crée aucune difficulté d'implémenter ces calculs sur un ordinateur. Pour les valeurs suivantes: $\beta = 1/1.01$, $\alpha = 0.36$, $\sigma = 1$, $\delta = 0.025$, on trouve

$$\begin{cases} \hat{k}_t = 0.965 \hat{k}_{t-1} + 0.075 \hat{z}_t, \\ \hat{c}_t = 0.618 \hat{k}_{t-1} + 0.305 \hat{z}_t, \\ \hat{R}_t = -0.022 \hat{k}_{t-1} + 0.035 \hat{z}_t. \end{cases}$$

Remarquez que comme le système ci-dessus est exprimé en terme de log-déviations, les coefficients peuvent être interprétés comme des élasticités.

Remarquez également que comme cette méthode nous donne directement des règles de décision (approximées), il n'y a pas besoin de discrétiser le processus stochastique. Il suffira de partir

⁵⁰ Le discriminant $\Delta = \gamma^2 - \frac{4}{\beta} > 0$, puisque $\gamma > 1 + \frac{1}{\beta}$. Il y a donc deux racines réelles. Le produit (R^*) de ces racines et leur somme (γ) sont tous deux positifs. Chaque racine est donc positive. Dénotons μ_1 (μ_2) la plus petite (grande). On peut vérifier que $\mu_1 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{\beta}} < 1$. Comme $\mu_1 \mu_2 = R^* = 1/\beta > 1$, $\mu_2 > 1$.

d'une valeur initiale pour le composant technologique z_t , puis de procéder à des tirages pour la variable aléatoire $\{\varepsilon_t\}$.⁵¹

Il est possible d'utiliser ces règles de décision de la façon suivante:

- Faire de l'analyse de sensibilité sur les paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \sigma)$.
- Grapher le sentier du capital si l'on commence sous l'état stationnaire, par exemple avec $\widehat{k}_{-1} = -0.05$ (5% sous k^*) et s'il n'y a pas de chocs ($\widehat{z}_t = 0$ pour tout t). Puisque $0 < \mu_{kk} < 1$, l'économie va converger vers l'état stationnaire k^* . En fait, $\widehat{k}_t = \mu_{kk}^t \widehat{k}_{-1}$.
- Grapher ce qu'il advient des autres variables sur le sentier. Soit on utilise le système log-linéarisé et on calcule les variables en déviation, par exemple $\widehat{c}_t = \mu_{ck} \widehat{k}_{t-1}$. Soit on calcule les variables en niveau, $k_t = k^* e^{\widehat{k}_t}$ et on obtient $c_t = k_{t-1}^\alpha + (1 - \delta)k_{t-1} - k_t$.
- Faire tourner le modèle en: simulant des tirages pour les $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$, choisissant \widehat{k}_{-1} et \widehat{z}_0 . On peut ensuite calculer récursivement $\widehat{z}_t = \rho \widehat{z}_{t-1} + \varepsilon_t$ et $\widehat{k}_t = \mu_{kk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz} \widehat{z}_t$. A partir de là, on peut obtenir toutes les autres variables.
- Impulse response function (IRF): grapher ce que deviennent les variables après un choc $\varepsilon_0 = \sigma_\varepsilon$ et $\varepsilon_t = 0$ pour tout $t > 1$, quand l'économie part de l'état stationnaire. Donc, en période 0, avec $\widehat{k}_{-1} = 0$ et $\widehat{z}_0 = \varepsilon_0 = \sigma_\varepsilon$.

12.2 Modèle RBC de Hansen

Nous considérons le modèle de Hansen (travail indivisible). L'utilité est $u = \ln c_t - \alpha n_t$ où n_t représente les heures de travail. Nous ne refaisons pas tous les calculs en détail, comme dans la section précédente, mais nous montrons plutôt comment procéder similairement...

Les conditions d'équilibre du modèle sont

$$\begin{cases} (1 - \alpha) \frac{1}{c_t} \frac{y_t}{n_t} = A, & (\text{Euler intratemporel}) \\ \beta E_t \left[\frac{c_t}{c_{t+1}} R_{t+1} \right] = 1, & (\text{Euler intertemporel}) \\ R_t = \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}} + 1 - \delta, & (\text{rendement}) \\ c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = z_t k_{t-1}^\alpha n_t^{1-\alpha} & (\text{budget}) \\ \ln z_t = (1 - \rho) \ln z^* + \rho \ln z_{t-1} + \varepsilon_t, & (\text{proc. stochastique}) \end{cases}$$

On en déduit l'état stationnaire

$$\begin{cases} (1 - \alpha) \frac{1}{c^*} \frac{y^*}{n^*} = A, \\ \beta R^* = 1, \\ R^* = \alpha \frac{y^*}{k^*} + 1 - \delta, \\ c^* + \delta k^* = y^*, \\ z^* = 1. \end{cases}$$

⁵¹MATLAB peut faire cela facilement, par l'intermédiaire de l'option `randn`, qui permet le tirage d'une variable aléatoire $N(0, 1)$.

La troisième condition nous permet d'exprimer y^*/k^* . A partir de là, la quatrième condition nous donne c^*/k^* . On peut ainsi obtenir y^*/c^* et en déduire n^* de la première condition. Revenant à la quatrième condition, nous obtenons k^* et finalement y^* et c^* .

Après linéarisation des conditions d'équilibre, nous obtenons

$$\begin{cases} \widehat{c}_t - \alpha(\widehat{k}_{t-1} - \widehat{n}_t) - \widehat{z}_t \approx 0, & (Euler \text{ intratemporel}) \\ E_t[\widehat{c}_t - \widehat{c}_{t+1} + \widehat{R}_{t+1}] \approx 0, & (Euler \text{ intertemporel}) \\ \widehat{R}_t - \alpha \frac{y^*}{k^*} \frac{1}{R^*} [\widehat{z}_t - (1 - \alpha)(\widehat{k}_{t-1} - \widehat{n}_t)] \approx 0, & (rendement) \\ \widehat{c}_t - \frac{y^*}{c^*} \widehat{z}_t + \frac{k^*}{c^*} \widehat{k}_t - \frac{k^*}{c^*} R^* \widehat{k}_{t-1} - (1 - \alpha) \frac{y^*}{c^*} \widehat{n}_t \approx 0, & (budget) \\ \widehat{z}_t = \rho \widehat{z}_{t-1} + \varepsilon_t, & (proc. \text{ stochastique}) \end{cases}$$

(Comme d'habitude, le ratio capital-travail apparaît dans les conditions d'équilibre. C'est pourquoi nous le faisons également apparaître dans la version linéarisée, sous la forme $\widehat{k}_{t-1} - \widehat{n}_t$. Cela simplifie un peu les calculs.)

Là encore, nous postulons $\widehat{c}_t = \mu_{ck} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{cz} \widehat{z}_t$, $\widehat{k}_t = \mu_{kk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{kz} \widehat{z}_t$, $\widehat{n}_t = \mu_{nk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{nz} \widehat{z}_t$ et $\widehat{R}_t = \mu_{Rk} \widehat{k}_{t-1} + \mu_{Rz} \widehat{z}_t$. Il est possible de résoudre pour tous les coefficients. (*Exercice de pratique: faites le*). On trouve alors

$$\begin{cases} \widehat{c}_t = 0.5315 \widehat{k}_{t-1} + 0.4696 \widehat{z}_t, \\ \widehat{k}_t = 0.9420 \widehat{k}_{t-1} + 0.1550 \widehat{z}_t, \\ \widehat{n}_t = -0.4764 \widehat{k}_{t-1} + 1.4732 \widehat{z}_t, \\ \widehat{R}_t = -0.0327 \widehat{k}_{t-1} + 0.0673 \widehat{z}_t, \end{cases}$$

basé sur la paramétrisation suivante: $\beta = 1/1.01$, $\alpha = 0.36$, $\delta = 0.025$, $A = 2.5846$, $\rho = 0.95$, $\sigma_\varepsilon = 0.007$. La disutilité du travail A a été choisie pour retrouver les heures de travail à l'état stationnaire $h^* = 1/3$.

A partir de là, il est possible de faire le même type d'exercices que dans la section 12.1. Si l'on génère des séries simulées pour les différentes variables d'intérêt, il est aussi possible de générer les seconds moments habituels.

12.3 Généralisation: la boîte à outils d'Uhlig

Avec ces deux exemples, il devient apparent que calculer l'état stationnaire et log-linéariser l'ensemble des équation d'équilibre est relativement simple, mais que résoudre pour les coefficients des règles de décision à la main peut être plus difficile, surtout si le nombre de variables d'état (exogènes ou endogènes) et/ou le nombre de variables de contrôle augmentent. En d'autres termes, la méthode est en principe applicable à tout environnement, mais en pratique peut devenir plus difficile à gérer quand l'environnement devient plus complexe. (*Bien sûr, cette critique pourrait être faite de beaucoup de méthodes...*)

Cependant, Uhlig propose une méthode générale pour la résolution de modèles, basée sur la méthode des coefficients indéterminés. Nous esquissons l'approche générale et référons le lecteur intéressé à plus de

détails vers le document “A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Models Easily” de H. Uhlig. L’auteur a également mis en ligne quelques exemples d’application de sa méthode (http://www2.wiwi.hu-berlin.de/institute/wpol/html/toolkit/version4_1.html).

Les variables apparaissant dans les conditions d’équilibre sont groupées en deux catégories: un vecteur de variables endogènes x_t de taille $(x \times 1)$ et un vecteur de variables exogènes et stochastiques z_t , de taille $(z \times 1)$. Après log-linéarisation comme vu précédemment, les relations d’équilibre peuvent s’écrire comme

$$\begin{cases} E_t[F\hat{x}_{t+1} + G\hat{x}_t + H\hat{x}_{t-1} + L\hat{z}_{t+1} + M\hat{z}_t] = 0, \\ \hat{z}_{t+1} = N\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1}, \\ E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0, \end{cases}$$

où (F, G, H, L, M) sont des matrices et N n’a que de valeurs propres stables. Remarquez que la plupart des conditions d’équilibre ne comportent pas d’opérateurs expectation. Comme certaines conditions ont un aspect intertemporel, cela ne change rien d’écrire l’ensemble du système matriciel avec un tel opérateur.⁵²

(Nous rappelons la convention sur la datation. Une nouvelle date arrive avec de la nouvelle information. Si une variable est choisie et /ou connue à la date t , elle sera indexée par t . Les équations déterministiques auront les index $t - 1$ et t , les équations en expectation auront les indices $t - 1$, t et $t + 1$.)

L’objectif est de trouver une loi réursive stable (règle linéaire en \hat{x}_{t-1} et \hat{z}_t):

$$\hat{x}_t = P\hat{x}_{t-1} + Q\hat{z}_t,$$

où P et Q sont des matrices à déterminer.

Théorème 1 dans le manuscrit d’Uhlig nous apprend que:

S’il y a une loi réursive consistente avec les conditions d’équilibre, alors

a) La matrice P satisfait l’équation

$$FP^2 + GP + H = 0.$$

L’équilibre est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de P sont inférieures à 1 en valeur absolue.

b) Étant donné P , soit la matrice⁵³

$$V = N^T \otimes F + I_z \otimes (FP + G).$$

⁵²Par exemple, pour la contrainte de ressource, on écrirait

$$E_t[c^*\hat{c}_t + i^*\hat{i}_t - y^*\hat{y}_t] = 0,$$

bien qu’il n’y ait pas de terme indexé $(t + 1)$.

⁵³Le produit de Kronecker (\otimes) est défini comme suit. Soit deux matrices quelconques \mathbf{A} de dimension $(l_A \times c_A)$ et \mathbf{B} de dimension $(l_B \times c_B)$, alors

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & a_{1c_A}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & a_{2c_A}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l_A 1}\mathbf{B} & a_{l_A 2}\mathbf{B} & a_{l_A c_A}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est de dimension $(l_A l_B \times c_A c_B)$.

Alors,⁵⁴

$$VQ = -vec(LN + M).$$

Nous prouvons le théorème. Insérez la loi réursive postulée (pour la période $t + 1$) et la loi de transition du processus stochastique dans le système des conditions d'équilibre:

$$E_t[F(P\hat{x}_t + Q\hat{z}_{t+1}) + G\hat{x}_t + H\hat{x}_{t-1} + L(N\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1}) + M\hat{z}_t] = 0.$$

Comme $E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0$,

$$E_t[F(P\hat{x}_t + Q\hat{z}_{t+1}) + G\hat{x}_t + H\hat{x}_{t-1} + LN\hat{z}_t + M\hat{z}_t] = 0,$$

ce qui devient en regroupant les termes

$$E_t[(FP + G)\hat{x}_t + H\hat{x}_{t-1} + FQ\hat{z}_{t+1} + (LN + M)\hat{z}_t] = 0.$$

Maintenant, insérez à nouveau la loi postulée, mais cette fois ci pour la date t :

$$E_t[(FP + G)(P\hat{x}_{t-1} + Q\hat{z}_t) + H\hat{x}_{t-1} + FQ(N\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1}) + (LN + M)\hat{z}_t] = 0.$$

Tenant à nouveau compte que $E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$ et regroupant les termes, nous obtenons

$$(FP^2 + GP + H)\hat{x}_{t-1} + ((FP + G)Q + FQN + LN + M)\hat{z}_t = 0.$$

Comme cette relation doit être vraie pour chaque période, il faut que les coefficients sur \hat{x}_{t-1} et sur \hat{z}_t soient égaux à zéro. Annuler le coefficient sur \hat{x}_{t-1} nous donne la partie (a) du théorème, tandis qu'annuler le coefficient sur \hat{z}_t nous en donne la partie (b).

Uhlig propose une méthode de solution basée sur cette approche (en fait, il utilise une version un peu modifiée de cette approche où il distingue entre trois types de variables: (i) variables d'état endogènes, (ii) autres variables endogènes et (iii) variables stochastiques exogènes). De nombreux exemples sont sur son site. L'intérêt de ces programmes est qu'ils sont construits de façon à ce que l'utilisateur n'ait qu'à recalculer l'état stationnaire, et à rentrer les conditions d'équilibre log-linéarisées, et le programme fait le reste. Le lecteur est référé au site d'Uhlig pour en savoir plus.

13 Méthode par perturbation

Dans ce chapitre,⁵⁵ nous allons présenter une méthode, dite *par perturbation*, basée sur le développement au second terme des règles de décision. Nous allons commencer par voir pourquoi (i.e. dans quels cas) il *peut* être

⁵⁴Si une matrice A est de dimension $(l_A \times c_A)$, alors $vec(A)$ est le vecteur colonne de dimension $(l_A c_A \times 1)$ obtenu en compilant toutes les colonnes de A dans l'ordre, l'une au-dessus de l'autre.

⁵⁵De bonnes références sont Collard (notes), Collard et Juillard (JEDC, 2001), Fernandez-Villaverde (acétates), Flotho ("DGSE models - solution strategies"), Heer and Maussner (livre), Schmitt-Grohé et Uribe (notes), Schmitt-Grohé et Uribe (JEDC, 2004).

nécessaire de développer ces règles au delà du premier terme. Nous allons ensuite introduire la méthode par perturbation dans un cas simple (en fait, non économique). Puis, nous allons développer l’approche générale en nous basant sur le problème de Ramsey. Comme même dans ce cas simple, la méthode est relativement “lourde” à mettre en place, le chapitre suivant est dévolu à DYNARE, un logiciel se basant sur l’approche par perturbation, mais très simple à utiliser.

13.1 Pourquoi un développement au second ordre?

Nous allons voir sur un exemple simplifié comment un développement au premier ordre *peut* être insuffisant. En particulier, si la fonction d’utilité a une courbure forte, ou si les chocs ont beaucoup de volatilité (dans un problème où l’analyse du risque est importante, par exemple), un développement au premier ordre peut être trop approximatif, car il n’utiliserait pas l’information provenant des moments de second ordre de la distribution des chocs (*la méthode de développement au premier ordre impliquant une version du “certainty equivalent principle”*).

Considérons un système à résoudre

$$y = f(x),$$

où x est un vecteur de variables pré-déterminées et y un vecteur de variables non-prédéterminées. Supposons de plus que $E(x) = \bar{x}$. L’état stationnaire autour duquel nous allons approximer est $\bar{y} = f(\bar{x})$.⁵⁶

L’approximation de $y = f(x)$ au premier ordre est donnée par

$$y \approx \bar{y} + (x - \bar{x})f'(\bar{x}), \tag{1}$$

tandis que l’approximation de f au second ordre est

$$y \approx \bar{y} + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}). \tag{2}$$

Remarquez que, pour écrire cette expression, nous avons implicitement supposé que x et y sont de simples variables, et non des vecteurs.

Si nous nous contentons d’un développement de f au premier ordre, alors il est aisé d’établir à partir de (1) que $E(y) \approx \bar{y}$, c’est à dire que l’incertitude (variance du processus stochastique de x) ne joue aucun rôle. De même, $Var(y) \approx f'(\bar{x})^2 Var(x)$. Supposons également que nous voulions établir le niveau espéré de bien-être $Eu(y)$. Si nous utilisons un développement au premier ordre de l’utilité, nous avons que

$$u(y) \approx u(\bar{y}) + (y - \bar{y})u'(\bar{y}),$$

et donc $Eu(y) \approx u(\bar{y})$ ou $Eu(y) \approx u(Ey)$, clairement un résultat insatisfaisant qui ne reflète ni la courbure de l’utilité, ni les propriétés du processus stochastique.

⁵⁶Remarquez que nous ne disons surtout pas que $E(y) = \bar{y}$, ce qui reviendrait à dire que $E(f(x)) = f(E(x))$...

Pour cette raison, considérons un développement au second ordre de la fonction d'utilité,

$$u(y) \approx u(\bar{y}) + (y - \bar{y})u'(\bar{y}) + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2 u''(\bar{y}),$$

ce qui nous donne, après avoir pris l'espérance,

$$Eu(y) \approx u(\bar{y}) + E(y - \bar{y})u'(\bar{y}) + \frac{1}{2}E(y - \bar{y})^2 u''(\bar{y}). \quad (3)$$

Si nous continuons à utiliser le développement au premier ordre de f , comme dans (1), alors nous trouverions que

$$Eu(y) \approx u(\bar{y}) + \frac{1}{2}f'(\bar{x})^2 Var(x)u''(\bar{y}).$$

Cette expression prend bien en compte la courbure de la fonction d'utilité, ainsi que les caractéristiques du processus stochastiques sous-jacent. Cependant, nous ferions une erreur car nous combinerions un développement au premier ordre de f et un développement au second ordre de u . Cela peut se voir si nous utilisons plutôt le développement de f au second ordre (équation (2)) pour calculer $Eu(y)$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} E(y - \bar{y}) \approx \frac{1}{2}Var(x)f''(\bar{x}) \\ E(y - \bar{y})^2 \approx Var(x)f'(\bar{x})^2, \end{cases}$$

où on ne garde que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2. Dans ce cas, l'équation (3) implique

$$Eu(y) \approx u(\bar{y}) + \frac{1}{2}[f''(\bar{x})u'(\bar{y}) + f'(\bar{x})^2 u''(\bar{y})]Var(x).$$

Développer f et u au même (second) ordre est indispensable! Autrement dit, faire un calcul de bien-être au second ordre, à partir d'un modèle résolu au premier ordre peut conduire à des résultats incohérents (*au passage, nous voyons bien que l'expression ci-dessus prend en compte la courbure des fonctions u et f , et les caractéristiques du processus stochastique*).⁵⁷

13.2 Une illustration simple de la méthode

Nous commençons par un exemple numérique simple. Soit l'équation à résoudre

$$x^2 - 10 = 0, \quad (\mathcal{P})$$

pour laquelle nous cherchons la racine positive. Bien sûr, la solution est $\sqrt{10} \approx 3.1623$ et nous n'avons pas besoin de méthode élaborée pour trouver cela! Cependant, dans les problèmes macroéconomiques que nous avons à résoudre, la solution est donnée par un système d'équations pour lequel une solution explicite n'existe pas. Mais cet exemple nous permettra de développer un peu d'intuition pour l'approche générale. L'idée est de transformer le problème en introduisant un "paramètre de perturbation" σ et d'approximer la solution à notre problème original en faisant une approximation autour de σ .

⁵⁷Nous laissons le soin au lecteur de calculer $Eu(y)$, à partir d'un développement au second ordre de f , mais au premier ordre de u .

Réécrivons le problème comme

$$x^2 - (9 + \sigma) = 0. \quad (\mathcal{P}_\sigma)$$

Cela définit implicitement la racine positive x comme une fonction de σ , $x = r(\sigma)$ et nous pouvons réécrire (\mathcal{P}_σ) comme

$$r^2(\sigma) - 9 - \sigma = 0.$$

Nous cherchons à approximer r par un développement en série de Taylor autour de $\sigma = 0$ (car nous connaissons $r(0) = 3$). La fonction r n'étant (en général) connue qu'implicitement, nous devons faire appel au théorème de la fonction implicite pour obtenir

$$2r(\sigma)r'(\sigma) - 1 = 0.$$

Évaluée à $\sigma = 0$, nous obtenons $r'(0) = 1/(2r(0)) = 1/6$. Cela est suffisant pour un développement de degré 1,

$$r(\sigma) \approx r(0) + r'(0)\sigma \approx 3 + \frac{\sigma}{6}.$$

Si nous voulons améliorer l'approximation, nous passons au degré 2 et obtenons

$$2(r'(\sigma))^2 + 2r(\sigma)r''(\sigma) = 0.$$

Évaluée à $\sigma = 0$, nous obtenons $r''(0) = -(r'(0))^2/r(0) = -1/108$. Ainsi l'approximation de $r(\sigma)$ de degré 2 autour de $\sigma = 0$ est donnée par

$$r(\sigma) \approx r(0) + r'(0)\sigma + \frac{1}{2}r''(0)\sigma^2 \approx 3 + \frac{\sigma}{6} - \frac{1}{216}\sigma^2.$$

Au degré 3, nous avons

$$6r'(\sigma)r''(\sigma) + 2r(\sigma)r^{(3)}(\sigma) = 0,$$

ce qui nous donne $r^{(3)}(0) = -3r'(0)r''(0)/r(0) = 1/648$. La série à l'ordre 3 est donnée par

$$r(\sigma) \approx r(0) + r'(0)\sigma + \frac{1}{2}r''(0)\sigma^2 + \frac{1}{6}r^{(3)}(0)\sigma^3 \approx 3 + \frac{\sigma}{6} - \frac{1}{216}\sigma^2 + \frac{1}{3888}\sigma^3.$$

Nous pouvons maintenant vérifier la précision de l'approximation aux ordres 0, 1, 2 et 3:

Ordre	Série	Évaluée à $\sigma = 1$	x_i^2
0	3	$x_0 = 3$	9
1	$3 + \frac{\sigma}{6}$	$x_1 = 3.1667$	10.0278
2	$3 + \frac{\sigma}{6} - \frac{1}{216}\sigma^2$	$x_2 = 3.1620$	9.9985
3	$3 + \frac{\sigma}{6} - \frac{1}{216}\sigma^2 + \frac{1}{3888}\sigma^3$	$x_3 = 3.1623$	10.0001

Pretty cool! Mais qu'avons nous appris? D'abord, nous avons une méthode pour approximer la solution d'une équation. Cela est fait en transformant un problème par l'introduction d'un paramètre de perturbation

σ , à partir duquel nous faisons un développement en série de Taylor. Le développement est fait autour d'un point pour lequel nous connaissons la solution de l'équation transformée ($\sigma = 0$). Finalement, les coefficients de la solution approximée sont calculés récursivement (ordre 1, puis ordre 2, puis ordre 3...). La méthode générale, bien que plus compliquée (plusieurs variables, système implicite) suit la même approche...

Notez que, quand l'équation à résoudre est définie de façon implicite, l'utilisation du théorème de la fonction implicite permet de faire un développement de Taylor. Supposez en effet que nous ayons à trouver une règle de décision $y = g(x)$ telle que $h(x, y) = 0$ pour tout $x \in X$. Supposez que pour un point $x^* \in X$, nous connaissions la solution $y^* = g(x^*) = g^*$. Dérivons (en utilisant le théorème de la fonction implicite) l'équation $h(x, g(x)) = 0$. On obtient

$$h_1(x, g(x)) + h_2(x, g(x))g'(x) = 0,$$

ce qui donne après évaluation à $x = x^*$

$$g'(x^*) = -h_1(x^*, g^*)/h_2(x^*, g^*).$$

Continuons à dériver:

$$h_{11}(x, g(x)) + h_{12}(x, g(x))g'(x) + (h_{21}(x, g(x)) + h_{22}(x, g(x))g'(x))g'(x) + h_2(x, g(x))g''(x) = 0.$$

Au point (x^*, g^*) , nous avons

$$g''(x^*) = -\frac{h_{11}(x^*, g^*) + 2h_{12}(x^*, g^*)g'(x^*) + h_{22}(x^*, g^*)(g'(x^*))^2}{h_2(x^*, g^*)}.$$

Nous obtenons alors l'approximation $g(x) \approx g^* + g'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}g''(x^*)(x - x^*)^2$. Ici, aussi, les coefficients sont calculés de manière récursive.

13.3 Méthode générale

Nous commençons par une description générale de la méthode, puis considérons un cas particulier.⁵⁸

Soit le système

$$E_t[f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t)] = 0,$$

où le vecteur x_t contient les variables pré-déterminées du système et le vecteur y_t contient les variables non-prédéterminées. La fonction $f : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n = n_x + n_y$. De plus, le vecteur de variables d'état x_t est partitionné entre les variables endogènes x_t^1 et exogènes x_t^2 ($n_\varepsilon \times 1$). Le vecteur x_t^2 suit un processus stochastique

$$x_{t+1}^2 = \tilde{h}(x_t^2) + \tilde{\eta}\sigma\varepsilon_{t+1},$$

où ε_{t+1} est *i.i.d.* d'espérance nulle et de matrice de variance covariance I . La matrice $\tilde{\eta}$ ($n_\varepsilon \times n_\varepsilon$) tient en compte la taille relative des chocs.

⁵⁸La description générale provient de S. Flotho. L'exemple provient des notes de J. Fernandez-Villaverde.

La solution du système est donnée par des règles

$$\begin{cases} y_t = \widehat{g}(x_t), \\ x_{t+1} = \widehat{h}(x_t) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}. \end{cases}$$

Le paramètre de perturbation σ est un paramètre introduit pour aider à la résolution du modèle et représente le degré d'incertitude dans l'économie.⁵⁹ La solution va ainsi dépendre de ce facteur, ainsi bien sûr que des variables d'état. Ainsi, il faut chercher à déterminer deux fonctions

$$\begin{cases} y_t = g(x_t, \sigma), \\ x_{t+1} = h(x_t, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \end{cases}$$

où $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ et $h : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$.

L'approche consiste en trois étapes. Premièrement, il faut se placer autour de l'état stationnaire (x, y, σ) satisfaisant $f(y, y, x, x) = 0$ et $\sigma = 0$. Deuxièmement, il faut commencer par un développement à l'ordre 1 autour de cet état stationnaire:

$$\begin{cases} y_t \approx g(x, 0) + g_x(x, 0)(x_t - x) + g_\sigma(x, 0)\sigma, \\ x_{t+1} \approx h(x, 0) + h_x(x, 0)(x_t - x) + h_\sigma(x, 0)\sigma. \end{cases}$$

(*Implicitement, pour simplifier la notation, $n_x = n_y = 1$.*) Les termes $g(x, 0) = y$ et $h(x, 0) = x$ sont déjà connus. Les coefficients restant $[g_x(x, 0), g_\sigma(x, 0), h_x(x, 0), h_\sigma(x, 0)]$ sont calculés en substituant les règles de décision dans le système à résoudre et en obtenant ainsi

$$E_t[f(g(h(x_t, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \sigma), g(x_t, \sigma), h(x_t, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, x_t)] = 0 \equiv F(x_t, \sigma).$$

Il faut alors utiliser le fait que les dérivées de tout ordre en x et en σ sont nulles (puisque la fonction est elle-même nulle). La condition que $F_x = 0$ est utilisée afin de trouver les coefficients $g_x(x, 0)$ et $h_x(x, 0)$ (en ne gardant que les solutions préservant un système dynamique stable).⁶⁰ La condition que $F_\sigma = 0$ amène un système homogène en $(g_\sigma(x, 0), h_\sigma(x, 0))$ dont la solution est $(0, 0)$. Cela implique que la taille de variance des chocs n'importe pas - le "certainty equivalence principle" est satisfait (à l'ordre 1).

Dans un troisième temps, il faut passer au développement du second ordre des règles de décision. Les résultats sont substitués dans la condition que $F_{xx} = 0$ afin de trouver $g_{xx}(x, 0)$ et $h_{xx}(x, 0)$, dans la condition $F_{x\sigma} = 0$ afin de trouver $g_{x\sigma}(x, 0)$ et $h_{x\sigma}(x, 0)$, et dans la condition $F_{\sigma\sigma} = 0$ afin de trouver $g_{\sigma\sigma}(x, 0)$ et $h_{\sigma\sigma}(x, 0)$. En pratique, cela revient à résoudre des systèmes linéaires.

Afin de mieux illustrer l'approche, nous considérons maintenant l'exemple suivant (à nouveau le problème de Ramsey!). L'agent doit

$$\begin{aligned} \max E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \ln c_t, \\ \text{t.q.} \quad \begin{cases} c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = e^{z_t} k_t^\alpha, \\ z_t = \rho z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

⁵⁹ $\eta = [\varnothing \quad \widetilde{\eta}]^T$.

⁶⁰ Schmitt-Grohé et Uribe (2004) référence plusieurs algorithmes pour trouver des solutions à ce problème: Blanchard et Kahn (1985), Sims (2002) et Klein (2000). Flotho (2009) donne une présentation concise de la méthode de Blanchard et Kahn.

Le système d'équilibre est donné par

$$\begin{cases} \frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (\alpha e^{z_{t+1}} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) \right], \\ c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = e^{z_t} k_t^\alpha, \\ z_t = \rho z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t. \end{cases}$$

On cherche des règles de décision pour la consommation $c_t = c(k_t, z_t)$ et le capital $k_{t+1} = k(k_t, z_t)$. Avec ces fonctions, le système devient

$$\begin{cases} E_t \left[\frac{1}{c(k_t, z_t)} - \beta \frac{1}{c(k(k_t, z_t), \rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1})} (\alpha e^{\rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}} k(k_t, z_t)^{\alpha-1} + 1 - \delta) \right] = 0, \\ c(k_t, z_t) + k(k_t, z_t) - (1 - \delta)k_t = e^{z_t} k_t^\alpha. \end{cases}$$

On veut résoudre pour les fonctions $c(.,.)$ et $k(.,.)$, que nous allons en fait approximer. Remarquez que ce système est écrit pour un paramètre de perturbation donné. Nous cherchons donc en fait des règles

$$\begin{cases} c_t = c(k_t, z_t, \sigma), \\ k_{t+1} = k(k_t, z_t, \sigma). \end{cases}$$

Remarquez que l'interprétation du paramètre a changé. Au lieu de représenter le degré d'incertitude de l'environnement considéré, c'est un paramètre de perturbation autour duquel nous allons approximer les règles de décision. L'approximation se fait autour de $\sigma = 0$.

L'état stationnaire du problème correspond au cas où $\sigma = 0$ et $(k, z) = (\alpha\beta/(1 - \beta(1 - \delta)))^{1/(1-\alpha)}, 0)$. Le développement de la règle de consommation est donné par

$$\begin{aligned} c(k_t, z_t, \sigma) = & c(k, 0, 0) + c_k(k, 0, 0)(k_t - k) + c_z(k, 0, 0)z_t + c_\sigma(k, 0, 0)\sigma \\ & + \frac{1}{2}c_{kk}(k, 0, 0)(k_t - k)^2 + \frac{1}{2}c_{zz}(k, 0, 0)z_t^2 + \frac{1}{2}c_{\sigma\sigma}(k, 0, 0)\sigma^2 \\ & + c_{kz}(k, 0, 0)(k_t - k)z_t + c_{k\sigma}(k, 0, 0)(k_t - k)\sigma + c_{z\sigma}(k, 0, 0)z_t\sigma. \end{aligned}$$

Similairement, le développement de la règle de décision pour le capital est

$$\begin{aligned} k(k_t, z_t, \sigma) = & k(k, 0, 0) + k_k(k, 0, 0)(k_t - k) + k_z(k, 0, 0)z_t + k_\sigma(k, 0, 0)\sigma \\ & + \frac{1}{2}k_{kk}(k, 0, 0)(k_t - k)^2 + \frac{1}{2}k_{zz}(k, 0, 0)z_t^2 + \frac{1}{2}k_{\sigma\sigma}(k, 0, 0)\sigma^2 \\ & + k_{kz}(k, 0, 0)(k_t - k)z_t + k_{k\sigma}(k, 0, 0)(k_t - k)\sigma + k_{z\sigma}(k, 0, 0)z_t\sigma. \end{aligned}$$

L'objectif est donc de trouver les coefficients du développement de $c(k_t, z_t, \sigma)$ et de $k(k_t, z_t, \sigma)$.

Pour simplifier la notation, on peut réécrire

$$F(k_t, z_t, \sigma) \equiv E_t \left[\begin{array}{c} \frac{1}{c(k_t, z_t, \sigma)} - \beta \frac{1}{c(k(k_t, z_t, \sigma), \rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \sigma)} (\alpha e^{\rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}} k(k_t, z_t, \sigma)^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ c(k_t, z_t, \sigma) + k(k_t, z_t, \sigma) - (1 - \delta)k_t - e^{z_t} k_t^\alpha \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De même, on peut dénoter

$$F(k_t, z_t, \sigma) = E_t[\mathcal{H}(c_t, c_{t+1}, k_t, k_{t+1}, z_t, \sigma)] = E_t[\mathcal{H}(c(k_t, z_t, \sigma), c(k(k_t, z_t, \sigma), \rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \sigma), k_t, k(k_t, z_t, \sigma), z_t, \sigma)].$$

La fonction \mathcal{H} est alors donnée par

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{x_1} - \frac{\beta}{x_2} (\alpha e^{\rho x_5 + x_6 \varepsilon_{t+1}} x_4^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ x_1 + x_4 - (1 - \delta)x_3 - e^{x_5} x_3^\alpha \end{array} \right]$$

A partir de là, il est possible de calculer les dérivées de la fonction \mathcal{H} par rapport à chaque variable et à tout ordre, en tout point. On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 = \left[\begin{array}{c} \frac{-1}{x_1^2} \\ 1 \end{array} \right] \quad \mathcal{H}_2 = \left[\begin{array}{c} \frac{\beta}{x_2^2} (\alpha e^{\rho x_5 + x_6 \varepsilon_{t+1}} x_4^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ 0 \end{array} \right] \quad \mathcal{H}_3 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -(1 - \delta) - \alpha e^{x_5} x_3^{\alpha-1} \end{array} \right] \\ \mathcal{H}_4 = \left[\begin{array}{c} \frac{-\beta}{x_2} \alpha (\alpha - 1) e^{\rho x_5 + x_6 \varepsilon_{t+1}} x_4^{\alpha-2} \\ 1 \end{array} \right] \quad \mathcal{H}_5 = \left[\begin{array}{c} \frac{-\beta}{x_2} \alpha \rho e^{\rho x_5 + x_6 \varepsilon_{t+1}} x_4^{\alpha-1} \\ -e^{x_5} x_3^\alpha \end{array} \right] \quad \mathcal{H}_6 = \left[\begin{array}{c} \frac{-\beta}{x_2} \alpha \varepsilon_{t+1} e^{\rho x_5 + x_6 \varepsilon_{t+1}} x_4^{\alpha-1} \\ 0 \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

La fonction F est donnée par

$$F(k_t, z_t, \sigma) = E_t[\mathcal{H}(x_1(k_t, z_t, \sigma), x_2(k_t, z_t, \sigma), x_3(k_t), x_4(k_t, z_t, \sigma), x_5(z_t), x_6(\sigma))].$$

Puisque $x_1 = c_t = c(k_t, z_t, \sigma)$, $x_2 = c_{t+1} = c(k(k_t, z_t, \sigma), \rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \sigma)$, $x_3 = k_t$, $x_4 = k_{t+1} = k(k_t, z_t, \sigma)$, $x_5 = z_t$ et $x_6 = \sigma$, on trouve que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dk_t} = c_k; \quad \frac{dx_2}{dk_t} = c_k k_k; \quad \frac{dx_3}{dk_t} = 1; \quad \frac{dx_4}{dk_t} = k_k; \quad \frac{dx_5}{dk_t} = 0; \quad \frac{dx_6}{dk_t} = 0; \\ \frac{dx_1}{dz_t} = c_z; \quad \frac{dx_2}{dz_t} = c_k k_z + \rho c_z; \quad \frac{dx_3}{dz_t} = 0; \quad \frac{dx_4}{dz_t} = k_z; \quad \frac{dx_5}{dz_t} = 1; \quad \frac{dx_6}{dz_t} = 0; \\ \frac{dx_1}{d\sigma} = c_\sigma; \quad \frac{dx_2}{d\sigma} = c_k k_\sigma + \varepsilon_{t+1} c_z + c_\sigma; \quad \frac{dx_3}{d\sigma} = 0; \quad \frac{dx_4}{d\sigma} = k_\sigma; \quad \frac{dx_5}{d\sigma} = 0; \quad \frac{dx_6}{d\sigma} = 1. \end{array} \right.$$

(Pour simplifier la notation, nous avons omis les arguments (k_t, z_t, σ) .)

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_k &= E_t[\mathcal{H}_1 \frac{dx_1}{dk_t} + \mathcal{H}_2 \frac{dx_2}{dk_t} + \mathcal{H}_3 \frac{dx_3}{dk_t} + \mathcal{H}_4 \frac{dx_4}{dk_t} + \mathcal{H}_5 \frac{dx_5}{dk_t} + \mathcal{H}_6 \frac{dx_6}{dk_t}], \\ \implies F_k &= E_t[\mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k], \end{aligned}$$

car $\frac{dx_5}{dk_t} = \frac{dx_6}{dk_t} = 0$. En procédant de façon similaire,

$$\left\{ \begin{array}{l} F_z = E_t[\mathcal{H}_1 c_z + \mathcal{H}_2 (c_k k_z + \rho c_z) + \mathcal{H}_4 k_z + \mathcal{H}_5], \\ F_\sigma = E_t[\mathcal{H}_1 c_\sigma + \mathcal{H}_2 (c_k k_\sigma + \varepsilon_{t+1} c_z + c_\sigma) + \mathcal{H}_4 k_\sigma + \mathcal{H}_6]. \end{array} \right.$$

Remarquez que ces expressions sont établies pour tout (k_t, z_t, σ) .

Évalué à $(k_t, z_t, \sigma) = (k, 0, 0)$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k = \mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k = 0, \\ F_z = \mathcal{H}_1 c_z + \mathcal{H}_2 (c_k k_z + \rho c_z) + \mathcal{H}_4 k_z + \mathcal{H}_5 = 0, \\ F_\sigma = \mathcal{H}_1 c_\sigma + \mathcal{H}_2 (c_k k_\sigma + c_\sigma) + \mathcal{H}_4 k_\sigma = 0. \end{array} \right.$$

(Attention: ici, les arguments sont aussi omis, mais sont $(k, 0, 0)$.) Les trois expressions sont égales à zéro, car la fonction F elle-même est nulle (et ceci, en tout point). Les opérateurs $E_t(\cdot)$ ont disparu car les expressions sont évaluées à $\sigma = 0$ et parce que $E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0$. Le terme \mathcal{H}_6 a disparu pour les mêmes raisons. Rappelez-vous aussi que chaque \mathcal{H}_i est un vecteur 2×1 , de telle façon que le système ci-dessus est vraiment un système à six inconnues $(c_k, k_k, c_z, k_z, c_\sigma, k_\sigma)$, où les dérivées sont évaluées à $(k, 0, 0)$. En travaillant l’algèbre⁶¹ (comme au chapitre 12.1), à partir de $F_k = 0$, on obtient une équation du second degré en k_k dont une seule des racines est inférieure à 1 en module (solution stable). On peut alors en déduire c_k . A partir de $F_z = 0$, trouver (c_z, k_z) revient à résoudre un système linéaire. Remarquez que l’expression $F_\sigma = 0$ est un système linéaire homogène en (c_σ, k_σ) et que donc, $c_\sigma = k_\sigma = 0$ (on retrouve bien là qu’avec un développement au premier ordre (jusqu’à présent), on a une version du “Certainty Equivalent Principle”: le degré d’incertitude dans l’économie n’a pas d’effet sur les règles de décision).

Au premier ordre, rien ne distingue cette méthode de ce que nous avons vu précédemment.

Mais, il est aussi possible de continuer le développement au-delà du premier ordre, et cela différencie la méthode des autres méthodes que nous avons vues jusqu’à présent. La dérivation devient plus lourde, et pour cette raison, nous n’en montrons qu’une, celle de F_{kk} . Normalement, il faudrait aussi calculer F_{kz} , $F_{k\sigma}$, F_{zz} , $F_{z\sigma}$ et $F_{\sigma\sigma}$.

Comme

$$F_k = E_t[\mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k],$$

(là, les arguments sont (k_t, z_t, σ)), alors

$$F_{kk} = E_t \left[\begin{array}{l} \mathcal{H}_1 c_{kk} \\ + c_k [\mathcal{H}_{11} \frac{dx_1}{dk_t} + \mathcal{H}_{12} \frac{dx_2}{dk_t} + \mathcal{H}_{13} \frac{dx_3}{dk_t} + \mathcal{H}_{14} \frac{dx_4}{dk_t} + \mathcal{H}_{15} \frac{dx_5}{dk_t} + \mathcal{H}_{16} \frac{dx_6}{dk_t}] \\ + \mathcal{H}_2 [c_{kk} k_k + c_k k_{kk}] \\ + c_k k_k [\mathcal{H}_{21} \frac{dx_1}{dk_t} + \mathcal{H}_{22} \frac{dx_2}{dk_t} + \mathcal{H}_{23} \frac{dx_3}{dk_t} + \mathcal{H}_{24} \frac{dx_4}{dk_t} + \mathcal{H}_{25} \frac{dx_5}{dk_t} + \mathcal{H}_{26} \frac{dx_6}{dk_t}] \\ + \mathcal{H}_{31} \frac{dx_1}{dk_t} + \mathcal{H}_{32} \frac{dx_2}{dk_t} + \mathcal{H}_{33} \frac{dx_3}{dk_t} + \mathcal{H}_{34} \frac{dx_4}{dk_t} + \mathcal{H}_{35} \frac{dx_5}{dk_t} + \mathcal{H}_{36} \frac{dx_6}{dk_t} \\ + k_k \mathcal{H}_4 \\ + k_k [\mathcal{H}_{41} \frac{dx_1}{dk_t} + \mathcal{H}_{42} \frac{dx_2}{dk_t} + \mathcal{H}_{43} \frac{dx_3}{dk_t} + \mathcal{H}_{44} \frac{dx_4}{dk_t} + \mathcal{H}_{45} \frac{dx_5}{dk_t} + \mathcal{H}_{46} \frac{dx_6}{dk_t}]. \end{array} \right]$$

En tenant compte : (i) des calculs précédents pour dx_i/dk_t , dx_i/dz_t et $dx_i/d\sigma$, (ii) du fait que certaines des dérivées croisées de \mathcal{H} sont nulles, et (iii) que l’opérateur $E(\cdot)$ disparaît pour les mêmes raisons que précédemment, alors on trouve que (évalué à l’état stationnaire $(k, 0, 0)$)

$$F_{kk} = \mathcal{H}_1 c_{kk} + \mathcal{H}_{11} (c_k)^2 + \mathcal{H}_2 [c_{kk} k_k + c_k k_{kk}] + c_k k_k [\mathcal{H}_{22} c_k k_k + \mathcal{H}_{24} k_k] + \mathcal{H}_{33} + k_{kk} \mathcal{H}_4 + k_k [\mathcal{H}_{42} c_k k_k + \mathcal{H}_{44} k_k] = 0.$$

⁶¹ Dans un cas général, le système constitué des dérivées de F par rapport aux variables d’état constitue un système non-linéaire à plusieurs inconnues. Dans ce cas, les approches de Blanchard et Kahn (1985), Sims (2002), Klein (2000) ou Uhlig (1999) peuvent être utilisées pour trouver des solutions non-explosives à ce système. Dans le cas simple présent, les deux premières expressions ($F_k = F_z = 0$) constituent un système quadratique de quatre équations à quatre inconnues c_k, c_z, k_k, k_z .

(Remarquez que cela constitue un système linéaire en (c_{kk}, k_{kk}) .)

Procédant ainsi pour toutes les dérivées croisées de $F(k_t, z_t, \sigma)$, et puisque la fonction F est nulle, nous obtenons à nouveau un système à résoudre

$$F_{kk}(k, 0, 0) = F_{kz}(k, 0, 0) = F_{k\sigma}(k, 0, 0) = F_{zz}(k, 0, 0) = F_{z\sigma}(k, 0, 0) = F_{\sigma\sigma}(k, 0, 0) = 0,$$

où les inconnues sont $(c_{kk}, c_{kz}, c_{k\sigma}, c_{zz}, c_{z\sigma}, c_{\sigma\sigma}, k_{kk}, k_{kz}, k_{k\sigma}, k_{zz}, k_{z\sigma}, k_{\sigma\sigma})$. Comme dans les exemples simples de la section 13.2, ce système à résoudre est linéaire et donc plus facile à résoudre que pour le développement au premier ordre... On peut s'en convaincre en regardant l'expression trouvée pour F_{kk} .⁶²

(Quelques remarques en vrac: il n'y a toujours qu'un seul paramètre de perturbation quelque soit le problème à résoudre; le développement se fait toujours autour de $\sigma = 0$, car pour cette valeur, on connaît la solution du problème, i.e. on est à l'état stationnaire du modèle.)

Si l'on aimait vraiment faire des calculs à la main, on pourrait continuer à développer les règles de décision jusqu'à n'importe quel ordre, mais un ordinateur est mieux équipé que l'être humain pour cela et surtout ferait moins d'erreurs.... En fait, le logiciel DYNARE implémente la méthode de résolution par "perturbation" à des ordres supérieurs à 2.

14 Dynare

Dynare est un programme qui permet de simuler des modèles d'équilibre général dynamiques et stochastiques (DGSE models).⁶³ Son avantage principal est sa facilité relative d'utilisation pour un grand nombre de problèmes. Son inconvénient principal étant que c'est un peu une "boîte noire". Bien sûr, même si le programme est pratique d'utilisation, il ne peut être utile que si le système d'équilibre est bien posé. Mais nous savons faire cela dorénavant.

Nous allons donc introduire le logiciel DYNARE, en nous référant au guide d'utilisateur.⁶⁴

Pour l'installation, voir le Manuel Référence Dynare v. 4.3.3.

⁶²Pour avoir une idée de ce à quoi ressemblent ces règles de décision, Fernandez-Villaverde reporte dans ses acétates que dans le cas où $\beta = 0.99$, $\alpha = 0.33$, $\rho = 0.95$, $\delta = 1$ et $\sigma = 0.01$,

$$c_t \approx 0.388069 + 0.680101(k_t - k) + 0.388069z_t - 1.20995(k_t - k)^2 + 0.680099(k_t - k)z_t + 0.194032z_t^2.$$

En fait, on trouve que $c_{k\sigma} = c_{z\sigma} = k_{k\sigma} = k_{z\sigma} = 0$ et que $c_{\sigma\sigma} \approx 0$ et $k_{\sigma\sigma} \approx 0$.

⁶³DYNARE a aussi la capacité d'estimer des modèles, mais cela va bien au-delà du cours ECO9015.

⁶⁴Deux documents de référence sont disponibles sur le site.

14.1 Introduction générale

Il faut toujours commencer par stationnariser son modèle (si besoin est) avant de commencer à penser à programmer Dynare.

Ensuite, il y a une distinction fondamentale à résoudre avant de commencer. Votre modèle est-il (i) déterministique ou (ii) stochastique? La distinction étant: (i) est-ce que les chocs futurs sont connus, auquel cas le modèle est déterministique, ou (ii) est-ce que seulement la *distribution* des chocs à venir est connue, auquel cas le modèle est stochastique?⁶⁵

Deuxièmement, la structure du programme (i.e. ce que l'utilisateur doit rentrer) suit le format suivant:

- le module “préambule” (preamble) liste les variables et les paramètres,
- le module “modèle” (model) introduit les équations d'équilibre,
- le module “état stationnaire” (steady state) calcule l'état stationnaire du modèle,
- le module “chocs” (shocks) définit et caractérise les chocs du modèle,
- le module “calcul” (computation) génère les résultats.

Nous allons maintenant détailler chacune de ces parties, en se basant sur un modèle RBC de base.

Nous rappelons brièvement ce modèle avant de commencer. Les marchés sont compétitifs, et il y a un ménage et une firme représentatifs. Il n'y a ni externalité, ni taxe. L'utilité du ménage est donnée par $u(c, l) = \ln c + A \ln l$, tandis que la technologie est donnée par $y_t = e^{z_t} k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$. L'ensemble des conditions d'équilibre est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right], & \text{Euler intertemporel} \\ \frac{A}{1-h_t} = \frac{1}{c_t} w_t, & \text{Euler intratemporel} \\ c_t + i_t = y_t, & \text{Contrainte de ressource} \\ y_t = e^{z_t} k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}, & \text{Technologie} \\ i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t, & \text{Investissement} \\ z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t. & \text{Processus stochastique} \end{array} \right.$$

(Remarquez qu'il n'y a pas de façon unique d'écrire le système d'équations, et donc non plus pas de façon unique d'écrire le programme Dynare.)

Le programme doit être écrit dans un fichier “fichier.mod” et est appelé par la commande “dynare fichier”. Toutes les lignes doivent se terminer par un point-virgule (;).

⁶⁵ Quand le modèle est déterministique, Dynare cherche une séquence de nombres, alors que quand le modèle est stochastique, Dynare cherche des règles de décision.

14.2 Les modules

Il peut être pratique de commencer un programme par les commandes “close all;” et “clc;”.

Module “préambule”:

- les variables endogènes sont listées.
- les variables exogènes soumises à des chocs sont listées.
- les paramètres sont listés, puis on leur assigne une valeur.

Soulignons une première différence entre un problème déterministique et un problème stochastique.

Dans le cas déterministique, tous les z_t à venir sont connus par hypothèse, et il n’y a pas de choc à proprement parler. Dans ce cas, on n’introduit pas les chocs ε , mais les $\{z_t\}$ sont introduits comme variables exogènes. Pour notre modèle de référence, nous avons:

```
var y c k i h w r z;
varexo z;
parameters beta A delta alpha;
beta = 0.99;
alpha = 0.36;
A = 1.7214;
delta = 0.025;
```

Dans le cas stochastique, il faut introduire le processus stochastique, et donc la variable exogène ε_t ; par contre, le niveau de technologie z_t est alors considéré comme endogène. Nous avons alors:

```
var y c k i h w r z;
varexo eps;
parameters beta A delta alpha rho sigmae;
beta = 0.99;
alpha = 0.36;
A = 1.7214;
delta = 0.025;
rho = 0.95;
sigmae = 0.007;
```

Module “modèle”:

Il s’agit d’écrire toutes les équations d’équilibre en délimitant le module par la commande “model;” et en le finissant par la commande “end;”.

Attention! La convention sur la datation est la suivante:

(1) La datation de chaque variable reflète la période à laquelle cette variable est décidée ou déterminée, un peu comme avec la boîte à outils d’Uhlig. Par exemple, la variable d’état capital qui influe sur le choix du ménage à la période t résulte d’une décision prise à la date $t - 1$, elle doit donc être datée de la période $t - 1$. (*Bien que vous n’ayez pas à dire à Dynare quelles sont les variables d’état ou de contrôle, les variables prédéterminées sont implicitement des variables d’état.*) Par contre, la variable de contrôle consommation est choisie en période t et doit donc être datée t . Seules les variables en $t+1$ peuvent avoir un terme d’expectation. Il faut donc tenir en compte cette convention avant de remplir le module “modèle”.⁶⁶

(2) Une fois cela pris en compte, vous pouvez rentrer vos équations d’équilibre. Une variable x à la date t se rentre comme x ; la même variable à la date $t - 1$ se rentre comme $x(-1)$, alors que la variable à la date $t + 1$ se rentre $x(+1)$.⁶⁷

Finalement, il faut que votre système comporte autant d’équations que de variables déclarées endogènes.

Pour notre modèle, qui est stochastique bien sûr, nous avons:

```

model;
(1/c) = beta * (1/c(+1)) * (1+r(+1)-delta);
A / (1-h) = (1/c) * w;
c + i = y;
i = k - (1-delta) * k(-1);
w = (1-alpha) * y / h;
r = alpha * y / k(-1);
y = exp(z) * k(-1) ^ alpha * h ^ (1-alpha);
z = rho * z(-1) + eps;
end;

```

Remarque: Il n’y a pas d’opérateur d’expectation! Comment sait-on que cela se rapporte bien à un modèle stochastique (sans considérer l’écriture du module “préambule”)? La présence de la dernière équation... Dans une version déterministique de notre modèle, nous n’aurions pas cette dernière ligne, et nous aurions également une variable déclarée endogène de moins (z).

Module “état stationnaire”:

Comme les modèles stochastiques doivent être approximés autour (typiquement) de l’état stationnaire, il s’agit de calculer ce dernier. Ou alors, il peut être intéressant de commencer à simuler un modèle déterministique d’un point donné. Il faut donc donner un point de départ à Dynare.

⁶⁶Dans les cas les plus standards, cela concerne seulement la variable capital. Mais il vaut mieux s’assurer à chaque fois de bien respecter la convention de datation.

⁶⁷Cette notation peut être étendue, comme $x(-n)$ ou $x(+n)$.

Vous commencez par introduire des valeurs initiales pour les variables. Cela se fait par l'intermédiaire des commandes "initval;" et "end;". Par exemple:

```
initval;  
k = 12.7;  
c = 0.9;  
h = 0.3;  
z = 0;  
eps = 0;  
y = 1.2;  
i = 0.3;  
w = 2.4;  
r = 0.04;  
end;
```

Laissé tel quel, Dynare considérera ce système de valeurs comme point de départ pour les simulations.

Sinon, vous pouvez demander à Dynare de considérer ces valeurs comme des approximations de l'état stationnaire. Il calculera alors précisément l'état stationnaire et commencera toutes les simulations de ce point. Cela se fait en ajoutant la commande:

```
steady;
```

Module "chocs":

Pour ce module, il est bon de différencier entre modèle déterministique et modèle stochastique.

Module "chocs" - modèle déterministique - chocs temporaires:

Si les chocs (connus à l'avance) sont temporaires, l'économie revient à son état stationnaire.

Il est possible de choisir la durée et l'amplitude des chocs.

Sur un exemple de chocs temporaires de neuf périodes:

```
shocks;  
var z;  
periods 1:9;  
values 0.1;  
end;
```

(Si l'on veut considérer au contraire l'effet de chocs anticipés dans le futur, on peut remplacer la troisième ligne par "periods 5:10;" par exemple).

Module "chocs" - modèle déterministique - chocs permanents:

Dans ce cas, l'économie ne retourne pas à son état stationnaire initial, mais atteint un nouvel état stationnaire. Cela peut être intéressant lorsqu'on étudie l'ajustement d'une économie à un choc structurel par exemple. Dans ce cas, on n'utilise pas la commande "shocks", mais à la place, on précise le nouvel état stationnaire vers laquelle l'économie converge. Dynare se charge de calculer le sentier de transition. Par exemple, si l'on veut calculer l'effet d'un changement permanent de la technologie, on écrirait:

```

initval;                                endval;
k = 12.7;                                k = 12.7;
c = 0.9;                                  c = 0.9;
h = 0.3;                                  h = 0.3;
z = 0;                                    z = 0.1;
y = 1.2;    suivi de y = 1.2;
i = 0.3;                                  i = 0.3;
w = 2.4;                                  w = 2.4;
r = 0.04;                                r = 0.04;
end;
steady;                                  steady;

```

(La technologie augmente vers 0.1 à partir de la période 1 (demain) et reste à ce niveau par la suite.)

Pour étudier le cas d'un choc permanent, mais à partir de la période 10 par exemple, il faudrait ajouter à la suite du bloc (endval; ... steady;), un autre module:

```

shocks;
var z;
periods 1:9;
values 0;
end;

```

Module "chocs" - modèle stochastique:

Puisque Dynare linéarise le modèle stochastique autour de l'état stationnaire, seuls les chocs temporaires sont considérés. Il suffit d'introduire la variance du processus stochastique, comme suit:

```

shocks;
var eps = sigmae^2;
end;

```

S'il y avait deux chocs, le module serait

```

shocks;
var eps = sigmae^2;
var mu = sigmam^2;
corr eps, mu = psi;
end;

```

(Il est suffisant de juste préciser les éléments non-nuls de la matrice variance-covariance.)

Module “calcul”:

Module “calcul” - modèle déterministique:

La commande pour lancer les calculs est:

```
simul;
```

ou “simul(periods=xxx);”. L’option précise le nombre de périodes pour la simulation. Le programme suppose que l’économie est de retour à son état stationnaire après le nombre de périodes spécifié (approximation).⁶⁸

Il faut donc choisir un nombre de périodes suffisamment élevé.

Module “calcul” - modèle stochastique:

La commande est:

```
stoch_simul;
```

Cette commande génère une IRF et les moments seconds habituels.

Le guide utilisateur fournit une liste d’options qui complètent la commande “stoch-simul;”.

Les plus importants sont:

- drop: nombre de points écartés au début de chaque simulation,
- hp_filter: constante de lissage du filtre hp,
- irf: nombre de périodes reportées pour la fonction de réponse impulsionnelle,
- order: 1 ou 2 - ordre de l’approximation de Taylor (défaut: ordre 2),
- periods: nombre de périodes pour les simulations.

En appendice 25, nous récapitulons l’exemple dans le cas stochastique.

14.3 Programme en version “exp-logs”

Il est possible d’écrire le programme de façon à ce que Dynare approxime autour de l’état stationnaire en utilisant des séries de Taylor en logs, plutôt qu’en niveau. Dans ce cas, les résultats seront fournis en “log(variable)” plutôt qu’en “variable”. Cela implique aussi que Dynare produit ses résultats en pourcentage de déviation de l’état stationnaire. Donc, l’interprétation des résultats doit changer. Par exemple, les écarts-types seront consistents avec la façon de calculer expliquée en section 11.6.1.

Bien sûr, l’écriture du programme change. Il s’agit principalement de tenir en compte que les variables sont en logs et de réécrire le module “modèle”. La convention Dynare est qu’une variable répétée veut dire log de cette variable, c’est à dire $xx = \log(x)$. Ainsi, si vous voulez insérer la variable x dans une équation, il faut rentrer $\exp(xx)$. En appendice 25, nous reprenons l’exemple en version “exp-logs”.

⁶⁸Cela suppose que l’option “endval;” n’est pas utilisée.

15 Modèles d'appariement

Voir les acétates “Appariement” et “Mortensen-Pissarides” sur le site du cours.

16 Modèles avec marchés incomplets

Prenez un environnement où des agents hétérogènes sont sujets à des chocs idiosyncratiques. Supposez également que les marchés soient complets, c'est-à-dire que les agents peuvent s'échanger des créances éventuelles qui dépendent de l'état réalisé (“state-contingent claims”) [*pour plus de détails, voir Sargent et Ljungqvist, ch. 7*]. Grâce à la capacité à assurer le risque que ces créances apportent, la consommation à l'équilibre est indépendante de l'histoire de l'agent (en termes de réalisation des chocs), mais ne dépend que de l'état actuel. Au contraire, nous considérons dans ce chapitre un environnement où la capacité à assurer le risque est très limitée. Le fait que la consommation actuelle dépende de l'*histoire* de l'agent implique que l'équilibre de cet économie va être caractérisé par une distribution des actifs des agents. Nous aurons donc un équilibre où la distribution des actifs est stationnaire, mais où les agents se déplaceront à l'intérieur de cette distribution, suivant la réalisation de leur histoire.⁶⁹

(*Sargent et Ljungqvist, ch. 14, traite de ces questions.*)

16.1 Environnement

Ces types de modèles sont souvent appelés modèles “à la Bewley” (Huggett (1993) et Aiyagari (1994) étant deux précurseurs.) Nous présentons ci-dessous celui d'Aiyagari.

Les ménages sont identiques ex-ante, mais hétérogènes ex-post (à cause de différentes réalisations de leurs histoires). L'histoire d'un agent représente la réalisation d'une séquence de chocs idiosyncratiques. (Il n'y a pas d'incertitude agrégée). Un ménage possède du capital k_t comme seul type d'actif et ne peut ni prêter, ni emprunter.⁷⁰ Ce capital permet à l'agent de s'auto-assurer contre les chocs.

Individuellement, l'emploi varie suivant un chaîne de Markov de dimension m , caractérisée par un ensemble d'états⁷¹ $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_m\}$ et une matrice de transition $\mathbf{\Pi}$. Si $s_t = s_i$, le revenu du travail est $w_t s_i$. Chaque période, les ménages investissent dans du capital k_{t+1} en fonction de leur capital k_t et de la réalisation de leur choc d'emploi s_t . Le capital individuel évolue selon

$$k_{t+1} = (r_t + 1 - \delta)k_t + w_t s_t - c_t.$$

Remarquez que dû à l'absence d'incertitude agrégée, les prix de facteurs à l'équilibre seront indépendants de la période considérée. Nous anticipons donc ce résultat et dénotons $w_t = w$ et $r_t = r$. Afin de simplifier la notation, définissons $\tilde{r} = r - \delta$.

⁶⁹Vous voyez sûrement un parallèle avec le modèle de Hopenhayn et Rogerson, que nous avons vu précédemment.

⁷⁰Au contraire du modèle d'Huggett où les ménages peuvent prêter et emprunter à un taux sans risque, mais n'ont pas de capital.

⁷¹Cela peut par exemple être $S = \{0, 1\}$ où $s = 0$ correspond au chômage et $s = 1$ à l'emploi.

Le problème de l'agent (individuel) est donné par

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$t.q. \begin{cases} k_{t+1} = (1 + \tilde{r})k_t + ws_t - c_t, \\ (k_0, s_0) \text{ donnés.} \end{cases}$$

L'équation de Bellman correspondante est

$$v(k_i, s_j) = \max_{k' \in \mathcal{K}} \{u(1 + \tilde{r})k_i + ws_j - k'\} + \beta \sum_{l=1}^m \pi_{jl} v(k', s_l) \quad \text{pour } i \in \{1 \dots n\} \text{ et } j \in \{1 \dots m\},$$

après discrétisation du problème. Ce problème a pour solution une règle de décision $k' = g(k, s)$.

16.2 Résolution

La résolution de cette équation de Bellman est basée sur la méthode d'itération sur la fonction de valeur. Considérons l'expression

$$v^{(p+1)}(k_i, s_j) = \max_{k' \in \mathcal{K}} \{u((1 + \tilde{r})k_i + ws_j - k') + \beta \sum_{l=1}^m \pi_{jl} v^{(p)}(k', s_l)\}.$$

Nous savons qu'itérer sur cette expression va converger vers un point fixe qui est la fonction de valeur.

Ce problème peut être représenté de façon plus compacte sous forme matricielle. Pour $j \in \{1 \dots m\}$, définissez les vecteurs $(n \times 1)$ \mathbf{v}_j et les matrices $(n \times n)$ \mathbf{R}_j tels que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_j(i) = v(k_i, s_j), \\ \mathbf{R}_j(i, h) = u((1 + \tilde{r})k_i + ws_j - k_h), \end{cases}$$

où (i, h) varient entre 1 et n . Soit l'opérateur $T[(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)] = [t\mathbf{v}_1, \dots, t\mathbf{v}_m]$ défini tel que pour tout j ,

$$t\mathbf{v}_j = \max\{\mathbf{R}_j + \beta(\pi_{j1}\mathbf{1}_n\mathbf{v}_1^T + \dots + \pi_{jm}\mathbf{1}_n\mathbf{v}_m^T)\},$$

où $\mathbf{1}_n$ est le vecteur $(n \times 1)$ dont tous les éléments sont égaux à 1. Ici, le "max" appliqué à une matrice $(q_1 \times q_2)$ donne un vecteur $(q_1 \times 1)$ dont le $i^{\text{ème}}$ élément est le maximum pris sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice.⁷² (Je vous laisse le soin de vérifier que l'écriture matricielle reproduit bien le problème que nous essayons de résoudre.) Plus compactement, l'opérateur peut être écrit comme

$$\begin{bmatrix} t\mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ t\mathbf{v}_m \end{bmatrix} = \max \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{bmatrix} + \beta(\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{1}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \right\},$$

⁷² Attention, cela ne correspond donc pas à l'opérateur max de MATLAB.

où \otimes est le produit de Kronecker.⁷³ La solution à notre problème est un point fixe de l'opérateur T et peut être obtenue en itérant sur cette expression. La règle de décision peut être représentée par un ensemble de matrices $\mathbf{G}^{(j)}$, $j \in \{1\dots m\}$, telles que

$$G_{hi}^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{if } g(k_h, s_j) = k_i, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Nous avons supposé l'environnement stationnaire. Il faut donc s'assurer que la distribution des états (k, s) soit bien indépendante du temps. Dénotons λ_t la distribution inconditionnelle sur les états (k_{t+1}, s_t) . Cette distribution peut être vue comme la distribution de (k, s) "à la fin de la période t ", c'est à dire après avoir reçu le choc de la période (s_t) et après avoir pris la décision d'investissement en conséquence (k_{t+1}) . Elle peut être représentée par une matrice $(n \times m)$ telle que

$$\lambda_t(k_i, s_j) = \Pr(k_{t+1} = k_i, s_t = s_j).$$

La loi de transition pour la distribution λ_t est entièrement déterminée à partir du processus stochastique [évolution des chocs] et de la règle de décision [réaction d'un agent à un choc]. Ainsi,

$$\underbrace{\Pr(k_{t+1} = k_i, s_t = s_j)}_{\text{Inconditionnelle } t} = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n \underbrace{\Pr(k_{t+1} = k_i | k_t = k_h, s_t = s_j)}_{\text{règle de décision}} \underbrace{\Pr(s_t = s_j | s_{t-1} = s_l)}_{\text{Probabilité de transition}} \underbrace{\Pr(k_t = k_h, s_{t-1} = s_l)}_{\text{Inconditionnelle } t-1}.$$

Un agent avec un capital k_i et un choc d'emploi s_j à la fin de la période t a pu commencer la période avec n'importe quel capital k_h et n'importe quel choc s_l , mais dans ce cas il a forcément reçu un choc s_j et a dû choisir un capital k_i . Bien sûr, les règles de décision dans l'expression ci-dessus sont du type 0/1 (matrices \mathbf{G}) et les probabilités de transition sont données par la chaîne de Markov $\mathbf{\Pi}$. Ainsi, on peut réécrire plus simplement

$$\lambda_t(k_i, s_j) = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n G_{hi}^{(j)} \pi_{lj} \lambda_{t-1}(k_h, s_l).$$

La distribution stationnaire λ satisfait donc

$$\lambda(k_i, s_j) = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n G_{hi}^{(j)} \pi_{lj} \lambda(k_h, s_l),$$

pour tout $i \in \{1\dots n\}$ et tout $j \in \{1\dots m\}$.

⁷³Soit deux matrices $A_{q_1 \times q_2}$ et $B_{q_3 \times q_4}$. Par définition, $A \otimes B$ est une matrice $q_1 q_3 \times q_2 q_4$ telle que

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q_2}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q_1 1}B & \cdots & a_{q_1 q_2}B \end{bmatrix}.$$

Remarquez que cette expression peut se réécrire

$$vec(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{Q}^T vec(\boldsymbol{\lambda}),$$

où l'opérateur “*vec*” consiste à transformer une matrice ($q_1 \times q_2$) en un vecteur ($q_1 q_2 \times 1$) obtenu en plaçant les q_2 colonnes dans l'ordre, l'une au-dessous de l'autre. La matrice ($mn \times mn$) \mathbf{Q} est donnée par

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \pi_{11} \mathbf{G}_1 & \pi_{12} \mathbf{G}_2 & \cdots & \pi_{1m} \mathbf{G}_m \\ \pi_{21} \mathbf{G}_1 & \pi_{22} \mathbf{G}_2 & \cdots & \pi_{2m} \mathbf{G}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m1} \mathbf{G}_1 & \pi_{m2} \mathbf{G}_2 & \cdots & \pi_{mm} \mathbf{G}_m \end{bmatrix} = (\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{G}_m \end{bmatrix},$$

où \mathbf{I}_n est la matrice identité de dimension n . Remarquez que la matrice \mathbf{Q} “hérite” des propriétés des matrices $\mathbf{\Pi}$ et \mathbf{G} . Ainsi, elle est elle-même une matrice stochastique.

Pour obtenir la distribution stationnaire $\boldsymbol{\lambda}$, on peut itérer sur la relation

$$vec(\boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = \mathbf{Q}^T vec(\boldsymbol{\lambda}_k),$$

jusqu'à convergence. La distribution stationnaire $\boldsymbol{\lambda}$ reproduit la fraction de la population dans l'état (k, s) .

Le problème de la firme représentative est simple. Cette dernière utilise une fonction de production agrégée Cobb-Douglas

$$Y = F(K, N) = K^\alpha N^{1-\alpha}.$$

En égalisant le produit marginal des facteurs à leurs prix, nous obtenons

$$\begin{cases} w = (1 - \alpha) \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha, \\ r = \alpha \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha-1}. \end{cases}$$

L'agrégation dans les marchés des facteurs peut être obtenue à partir de la distribution stationnaire $\boldsymbol{\lambda}$. Le capital agrégé résulte du choix de chaque agent. Ainsi,

$$K = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n \lambda(k_h, s_l) k_h.$$

Le travail agrégé résulte de la contribution à l'emploi cde chaque agent,

$$N = \boldsymbol{\pi}_\infty^T \mathbf{S},$$

où $\boldsymbol{\pi}_\infty$ est la distribution invariante associée à la chaîne de Markov $\mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{S}^T = [s_1 \dots s_m]$ le vecteur des niveaux d'emplois. *Remarquez que N est de fait exogène au modèle, comme le sont les histoires d'emploi de chaque*

agent.⁷⁴

Définition: Un équilibre (stationnaire) est constitué d'une règle de décision $k' = g(k, s)$, d'une distribution λ , de prix des facteurs (w, r) et d'un capital agrégé K , tels que:

- $g(k, s)$ satisfait le problème de l'agent,
- λ est induite par la chaîne de Markov Π et $g(k, s)$,
- les produits des facteurs (w, r) sont égaux à leurs produits marginaux,
- le capital agrégé K reflète les décisions des agents.

Pour trouver cet équilibre, on peut utiliser la procédure suivante:

Algorithme:

1. Commencez par une valeur initiale pour K , soit $K_j = K_0 > 0$;
2. Calculez w_j et r_j à partir du problème des firmes;
3. Étant donné w_j et \tilde{r}_j , résolvez le problème des ménages pour trouver $g_j(k, s)$ et $\lambda_j(k, s)$;
4. Calculez K_j^* en utilisant la condition d'agrégation;
5. Utilisant un paramètre fixe de "relaxation" $\kappa \in (0, 1)$, calculez une nouvelle estimation pour K à partir de

$$K_{j+1} = \xi K_j + (1 - \xi) K_j^*;$$

6. Itérez jusqu'à convergence.

Quadrini (RED, 2000) est un exemple intéressant d'application de ce type de modèle, puisqu'il ajoute une décision d'entrepreneuriat au modèle de base.

(Bien que nous ne le traiterons pas, Krusell et Smith (1998) généralise ce type de modèle à marchés incomplets en y ajoutant de la certitude agrégée. Cela rend le problème potentiellement bien plus compliqué, puisque la distribution n'est plus stationnaire et devient une variable d'état.)

⁷⁴Remarquez qu'on aurait pu définir la distribution inconditionnelle "en début de période t ", c'est à dire après avoir reçu le choc de la période, mais avant d'avoir pris la décision d'investissement en conséquence. Dénnotant μ_t cette distribution sur les états (k_t, s_t) , on obtiendrait la loi de transition suivante,

$$\mu_{t+1}(k_i, s_j) = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n G_{hi}^{(l)} \pi_{lj} \mu_t(k_h, s_l),$$

à partir de laquelle on peut obtenir la distribution stationnaire correspondante.

Pour être consistant, il aurait aussi fallu réécrire la condition d'agrégation du capital,

$$K = \sum_{l=1}^m \sum_{h=1}^n \mu(k_h, s_l) g(k_h, s_l).$$

(Exercice: redérivez les deux expressions ci-dessus.)

17 Incohérence temporelle: le principe d'optimalité ne s'applique plus

17.1 General considerations on the recursive nature of various problems

17.1.1 The standard competitive equilibrium has a recursive formulation

Consider the typical problem of⁷⁵

$$\max E_0 \left\{ \sum \beta^t u(z_t, s_t, d_t) \right\},$$

where z_t are state variables “chosen by nature” and follow a law of motion

$$z_{t+1} = f(z_t, \varepsilon_t).$$

The term ε_t is an innovation vector, thus z_t is our usual exogenous stochastic state vector. Think of s_t as (a vector of) state variables under “partial” control of the decision maker. Each period, he selects (a vector) of decision variables d_t . There is a fixed technology describing the motion of s_t given the actions d_t by the agent and actions z_t “by nature”

$$s_{t+1} = g(z_t, s_t, d_t).$$

The agent's decision rule is

$$d_t = h(z_t, s_t).$$

We know that, under suitable conditions, these types of problems have a recursive formulation. Intuitively, that property is due to two characteristics of the maximization problem, (i) that the criterion function [expected lifetime discounted utility] is additively separable and (ii) that decisions at time t only influences the returns dated t and later. This influence occurs directly on $u(z_t, s_t, d_t)$ and indirectly on $u(z_{t'}, s_{t'}, d_{t'})$, $t' > t$. Taken together, these features of the problem impart to it a sequential character which permits it to be solved via a recursive procedure.

In particular, consider a finite time horizon T . To solve, one would start by solving the constrained optimization problem at the last period for given $\{z_T, s_T\}$, thus generating a decision rule $h^T(z_T, s_T)$ [since we are not looking at an infinite horizon problem at this point, decision rules must be indexed by time]. Armed with that result, one could solve the agent's problem in period $T - 1$ using the decision rule h^T , generating a decision rule $h^{T-1}(z_{T-1}, s_{T-1})$. One could thus proceed recursively back to the current period. The agent can solve his problem now, knowing the decision rule he will use in any future period. It should be clear that once period τ , $0 < \tau \leq T$, is actually reached, the agent has no reason to use a different decision rule than the one originally prescribed. In fact, the preceding argument shows that if a sequence of policy functions $\{h^t, 0 \leq t \leq T\}$ is optimal, then the tail end of the plan $\{h^t, s \leq t \leq T\}$ is optimal for the remainder of the problem at $s > 0$. This property is known as Bellman's “principle of optimality” and is due to two features of

⁷⁵The problem can either have a finite or an infinite horizon.

our problem, (i) that the criterion function is additively separable and (ii) because of the sequential nature of the problem. When the horizon is infinite, we know that we can drop the time indices and that the decision rule will be independent of time. In that case too, agents have no reason to deviate from the decision rule in future periods.

17.1.2 “Early” applications to macroeconomic policy - The “Lucas’ Critique”

The insight of optimal control theory have been applied in the 1970’s to the design of macroeconomic policy. We will see in this section the flaws associated with that approach, essentially an argument similar in spirit to the famous “Lucas’ critique”.

Recall the problem

$$\begin{aligned} \max_{\{d_t\}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(z_t, s_t, d_t) \right\}, \\ \text{s.t.} \quad z_{t+1} = f(z_t, \varepsilon_t), \\ \quad \quad s_{t+1} = g(z_t, s_t, d_t), \end{aligned}$$

where the optimization is over control laws of the form $d_t = h(z_t, s_t)$. In applications of this setup to determining macroeconomic policy rules, $\{d_t\}$ was interpreted as a vector of policy instruments, such as tax rates, government expenditures, money supply, etc. $\{s_t\}$ was considered to be a set of endogenous variables, such a output, labor, etc. Finally, the function g was an “econometric model” of the economy. The function h was the optimal law for the macroeconomic policy variables. The idea was to implement this setup in the context of particular concrete econometric models g to make quantitative statements about optimal fiscal and monetary policy rules.

These applications view the policymaking problem as “a game against nature”. That is, the problem assumes that the functions f and g are both fixed and independent of the policymaker’s choice of h . But recall that $s_{t+1} = g(z_t, s_t, d_t)$ constitute an econometric model of private agents’ behavior. Included in the policymaker’s g are the decision functions of private agents, who themselves face dynamic optimization problems. The assumption that g is independent of the government’s choice of its h is inconsistent with the notion that private agents are solving *their* optimization problems properly. This is the essence of the Lucas’ critique. Widely used macroeconometric models should recognize that private agents’ decision rules are *not* invariant to government policies. Thus one cannot use a given assumed macroeconometric model g to analyze the effect of government policy on macroeconomic aggregates.

17.1.3 Modeling both government’s and private agents’ decisions and their interactions

These observations suggest that the single-agent decision theory outlined above is inadequate for fully analyzing the mutual interaction of the government’s and private agents’ decisions. For that, we need to set up a game featuring two agents, agent 1 and agent 2. We will think of agent 1 as the government and agent 2 as

being the public or the private agent.⁷⁶ The technology is now defined as

$$s_{t+1} = \bar{g}(z_t, s_t, d_{1t}, d_{2t}), \quad (4)$$

where d_{it} is the control variable now set by agent i . We retain that

$$z_{t+1} = f(z_t, \varepsilon_t). \quad (5)$$

Consider a finite horizon T . Agent 1's problem is to

$$\max E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta_1^t u_1(z_t, s_t, d_{1t}, d_{2t}) \right\}, \quad (6)$$

while agent 2's problem is to

$$\max E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta_2^t u_2(z_t, s_t, d_{1t}, d_{2t}) \right\}. \quad (7)$$

We assume that at each t , each agent observes $\{s_t, z_t\}$. The maximization problem is over decision rules of the form $d_{it} = \bar{h}_{it}(z_t, s_t)$, $i = 1, 2$ and $0 \leq t \leq T$. One can define the game played in one of two ways, as a Nash equilibrium or a Stackelberg or dominant-player equilibrium.

Nash equilibrium In the Nash equilibrium, agent i is supposed to maximize his criterion function (6) or (7) subject to (4)-(5) *and* knowledge of the sequence of the decision rules $\bar{h}_{-i,t}$, $t = 0 \dots T$, of the other agent. The maximization is carried out taking *as given* the $\bar{h}_{-i,t}$ of the other agent, so that agent i assumes that his choice of the sequence of functions \bar{h}_{it} has no effect on the decision rules $\bar{h}_{-i,t}$, $t = 0 \dots T$. A Nash equilibrium is a pair of sequences of functions $\{\bar{h}_{1t}\}, \{\bar{h}_{2t}\}$, $t = 0 \dots T$ such that \bar{h}_{1t} maximizes

$$E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta_1^t u_1(z_t, s_t, d_{1t}, \bar{h}_{2t}(z_t, s_t)) \right\}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \bar{g}(z_t, s_t, d_{1t}, \bar{h}_{2t}(z_t, s_t)), \\ s.t. \quad d_{1t} &= \bar{h}_{1t}(z_t, s_t), \\ z_{t+1} &= f(z_t, \varepsilon_t), \end{aligned}$$

while \bar{h}_{2t} maximizes

$$E_0 \left\{ \sum_{t=0}^T \beta_2^t u_2(z_t, s_t, \bar{h}_{1t}(z_t, s_t), d_{2t}) \right\}, \quad (9)$$

⁷⁶In many problems, we would like a single government, agent 1, to face a large collection of private agents who act approximately competitively. For this purpose, we would use an N -agent game in which agents 2, ..., N are the private agents. Equation (4) would be replaced by $s_{t+1} = \tilde{g}(z_t, s_t, d_{1t}, \dots, d_{Nt})$ and (6)-(7) would be modified accordingly. For the N -agent setup, most of the remarks we make about the two-agent setup game would apply.

$$\begin{aligned}
s_{t+1} &= \bar{g}(z_t, s_t, \bar{h}_{1t}(z_t, s_t), d_{2t}), \\
s.t. \quad d_{2t} &= \bar{h}_{2t}(z_t, s_t), \\
z_{t+1} &= f(z_t, \varepsilon_t).
\end{aligned}$$

The Nash equilibrium of this game is known to have the property that the “principle of optimality” applies to the maximization problem of each player. This can be verified by noticing that problem (8) or (9) is a version of the single-agent maximization problem studied in section 17.1.1. This means in particular that one can use recursive methods to compute the Nash equilibrium decision rules. The fact that in a Nash equilibrium, each agent’s problem satisfies the principle of optimality means that each agent has an incentive to adhere to the sequence of decision rules that he initially chooses. This is true so long as the assumptions about each agent’s perception of the independence of the other agent’s decision from his own decisions remain valid.

Stackelberg equilibrium A second concept is the Stackelberg or dominant-player equilibrium. The leader, player 1, say the government, is assumed to take into account the mapping between its current and future policies at a given time t , \bar{h}_{1s} , $s \geq t$ and the follower’s (private agent 2) “response” at date t , i.e. the government anticipates that

$$\bar{h}_{2t} = T_t(\bar{h}_{1s}, s \geq t).$$

Thus, the government chooses $\{\bar{h}_{1t}, t = 0 \dots T\}$ to maximize

$$E_0 \sum_{t=0}^T \beta_1^t u_1(z_t, s_t, \bar{h}_{1t}(z_t, s_t), T_t(\bar{h}_{1s}, s \geq t)(z_t, s_t)), \quad (10)$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} s_{t+1} &= \bar{g}(z_t, s_t, \bar{h}_{1t}(z_t, s_t), T_t(\bar{h}_{1s}, s \geq t)(z_t, s_t)), \\ z_{t+1} &= f(z_t, \varepsilon_t). \end{aligned} \quad (11)$$

This expresses the fact that the government is choosing the sequence of $\{\bar{h}_{1t}\}$ taking into account the effect of this choice on the private agent’s sequence of decisions. The private agent is behaving in the same fashion as described for the Nash equilibrium. That is, he is solving his maximization problem taking the sequence of functions $\{\bar{h}_{1t}\}$ as given.

A dominant-player or Stackelberg equilibrium is a pair of sequences $\{\bar{h}_{1t}, t = 0 \dots T\}$ and $\{\bar{h}_{2t}, t = 0 \dots T\}$ such that $\{\bar{h}_{2t}, t = 0 \dots T\}$ maximizes the follower’s criterion function (9) given the sequence $\{\bar{h}_{1t}\}$ and such that $\{\bar{h}_{1t}, t = 0 \dots T\}$ maximizes the leader’s criterion (10) subject to (11) and given the mappings $\bar{h}_{2t} = T_t(\bar{h}_{1s}, s \geq t)$.

In the dominant-player equilibrium, the follower’s problem is readily shown to satisfy the principle of optimality. However, the leader’s problem *does not* satisfy the principle of optimality. The reason is that via the mappings T_t , the functions \bar{h}_{1t} influence the returns of agent 1 for dates earlier than t . This means that the problem ceases to be a sequential one to which the principle of optimality applies. The reason that

the principle of optimality fails to hold for the leader's problem is the appearance of future values of his own policy functions \bar{h}_{1s} in the current return or utility function at date $t < s$. Future \bar{h}_{1s} 's appear in current utility through the mappings $\bar{h}_{2t} = T_t(\bar{h}_{1s}, s \geq t)$, which summarize the influence of the leader's current and future policy functions \bar{h}_{1s} on the follower's current decision rules. In essence, the principle of optimality fails to hold for the leader's problem because he is taking account of the fact that he is playing a dynamic game against an intelligent agent who is reacting in systematic ways to his own choice of \bar{h}_{1s} . In particular, in choosing the policy functions \bar{h}_{1s} , the leader takes into account the influence of his choice on the follower's choices *in earlier periods*.

One consequence is the following. Suppose that a particular sequence of functions $\{\bar{h}_{1t}\}$ is optimal for the problem (10) starting at date t . It is *not* in general true that the tail end of the plan is optimal for the remainder of the problem, starting at $s > t$. This means that in general, at future points in time, the leader has an incentive to depart from a previously planned sequence of policy functions. Some authors, in particular Kydland and Prescott (JPE 1977) which we are studying in section 17.2, refer to this situation as the "time inconsistency of optimal plans". At future points in time, the leader has an incentive to depart from a previously planned optimal strategy \bar{h}_{1t} and to employ some different sequence of policy functions for the tail of the problem. However, if a leader actually gives in to the temptation to abandon the initially optimal rules \bar{h}_{1t} in favor of new rules, this invalidates the assumptions used by the follower in solving his problem. Once the follower catches on to this fact, the follower has an incentive not to behave as originally predicted, leading to a breakdown in an ability either to predict the behavior of the follower or to make an analytic statement about optimal government policy. In other terms, all hell breaks loose!

This section was meant as an introduction to issues of time inconsistency. The next section is developing models where time inconsistency arises.

17.2 Time inconsistent policies: some examples from the literature

17.2.1 Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans

The model is derived from a celebrated paper from Kydland and Prescott (JPE 1977). I am reporting here just the basic points. The paper itself reports some applications. The point of the paper is to show that "a time-consistent plan is typically sub-optimal". What does this mean? We first need to set up some notation, as well as the definition of optimal (which is standard) and time consistent (which is new).

Let us start by quoting the abstract form Kydland and Prescott:

"Even if there is an agreed-upon, fixed social objective function and policymakers know the timing and magnitude of the effects of their actions, discretionary policy, namely, the selection of that decision which is best, given the current situation and a correct evaluation of the end-of-period position, does not result in the social objective function being maximized. The reason for this

apparent paradox is that economic planning is not a game against nature but, rather, a game against rational economic agents. We conclude that there is *no* way control theory can be made applicable to economic planning when expectations are rational.”

We illustrate that point by defining optimal and time-consistent policies and showing on a simple example why the two notions do not coincide. Take a time horizon $T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.⁷⁷ Let $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_T)$ be a sequence of policies for periods 1 to T and $x = (x_1, \dots, x_T)$ be the corresponding sequence of economic agents’ decisions. An agreed-upon social objective function

$$S(x_1, \dots, x_T, \pi_1, \dots, \pi_T), \tag{12}$$

is assumed to exist. Agents’ decisions in period t depend upon *all* policy decisions and their *past* decisions,

$$x_t = X_t(x_1, \dots, x_{t-1}, \pi_1, \dots, \pi_T), \quad t = 1, \dots, T. \tag{13}$$

Definition 1 *An optimal policy, if it exists, is that feasible π which maximizes (12) subject to constraints (13).*

Thus for the optimal policy, the government chooses its policy once and for all.

Definition 2 *A policy π is time-consistent if, for each time period t , π_t maximizes (12), taking as given previous decisions, x_1, \dots, x_{t-1} , and that future policy decisions (π_s for $s > t$) are similarly selected.*

In that case, policies are chosen sequentially.

The inconsistency of the optimal plan is easily demonstrated by a two-period example. Let us start with the optimal problem, which is for the government to choose a sequence of policies (π_1, π_2) to maximize the social welfare function:

$$\begin{aligned} \max_{\pi_1, \pi_2} & S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2) \\ \text{s.t.} & \quad x_1 = X_1(\pi_1, \pi_2), \\ & \quad x_2 = X_2(x_1, \pi_1, \pi_2). \end{aligned}$$

Notice this is consistent with commitment from the government, since *both* x_1 and x_2 depend on (π_1, π_2) and (π_1, π_2) chosen at the beginning.

The second-period policy of the *optimal* plan is determined by

$$\max_{\pi_2} S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2),$$

⁷⁷The definition of time consistency presented will really only apply to the finite horizon case. However, the paper by Kydland and Prescott presents an extension of the concept to the infinite horizon case. It basically requires that it be best to use now the same policy expected to be used in the future.

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 = X_1(\pi_1, \pi_2), \\ & x_2 = X_2(x_1, \pi_1, \pi_2). \end{aligned}$$

Assuming differentiability and an interior solution, this gives us the following first order condition

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \left[\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} + \frac{\partial X_2}{\partial \pi_2} \right] + \frac{\partial S}{\partial \pi_2} = 0,$$

which rearranged gives us

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial \pi_2} + \frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} \left[\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right] = 0.$$

The second-period policy of the *time-consistent plan* is determined by

$$\begin{aligned} & \max_{\pi_2} S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2), \\ \text{given} \quad & (\bar{x}_1, \bar{\pi}_1), \\ & x_2 = X_2(\bar{x}_1, \bar{\pi}_1, \pi_2). \end{aligned}$$

Notice that this is the time-consistent specification, since (i) it does not consider the effect of π_2 on x_1 , (ii) there is no incentive to deviate once in the second period (sequential choice). The first order condition is given by

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial \pi_2} = 0.$$

The first period problems for policy π_1 are the same under either plan, and are given by⁷⁸

$$\begin{aligned} & \max_{\pi_1} S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2), \\ \text{s.t.} \quad & x_1 = X_1(\pi_1, \pi_2), \\ & x_2 = X_2(x_1, \pi_1, \pi_2). \end{aligned}$$

Thus, the difference between the two plans comes from the second period problems, which typically give different solutions unless either $\frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} = 0$ or $\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0$, i.e. unless π_2 has no effect on x_1 (and thus there cannot be commitment problems) or the “combined” effect of a change of x_1 on S is nil (and thus the choice of x_1 does not change S). It should be apparent from the two maximization problems that the time-consistent policy ignores the effect of π_2 on x_1 . Hence, the time-consistent plan is typically sub-optimal, yet it is time-consistent since the government has no incentive to deviate from it.

Notice that the result that the two plans do not coincide is not due to the fact that the government uses a different objective function than the social welfare function in the time-consistent plan.

⁷⁸The first order condition is

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \pi_1} \right) + \frac{\partial S}{\partial \pi_1} = 0.$$

We thus see that the use of “discretion” (as opposed to rules) in setting policies can lead to suboptimal outcomes. This indicates that access to a commitment technology (following a rule) that binds the government not to choose sequentially has value. As explained by Kydland and Prescott, “the reason that such time-consistent policies are suboptimal is not due to myopia. The effect of this decision upon the entire future is taken into consideration. Rather, the suboptimality arises because there is no mechanism to induce *future* policymakers to take into consideration the effect of their policy, via the expectations mechanism, upon *current* decisions of agents.” It is also another illustration that using standard dynamic programming techniques is not appropriate in the context of optimal policy design. The intuition is that we use the standard dynamic programming techniques in situations where current outcomes and the movement of the state variables depend only upon current and past policy decisions and the current states. But it cannot be used when agents’ decisions also depend on their expectations of future policies.⁷⁹

17.2.2 Inflationary bias of monetary policy

The material presented comes from Shouyong Shi’s course notes, posted on the site.

17.2.3 A tax example

This subsection is building from Barro (1989).⁸⁰ Let us start by presenting a simple model. We will then sketch a generalization of the results from that simple model.

Consider an economy with a large number of identical consumers and a government. There is a linear production technology for the marginal product of capital is a constant $R > 1$ and the marginal product of labor is 1. Consumers make decisions at two distinct points in time, the *first-stage* and the *second-stage*. They make consumption-investment decisions at the first stage and consumption-labor supply decision at the second stage. At the first stage, consumers are endowed with ω units of the consumption good from which they consume c_1 and save k . At the second stage, they consume c_2 and work l units. Second-stage income, net of taxes is $(1 - \tau_k)Rk + (1 - \tau_h)l$, where τ_k and τ_h denote the tax rates on capital and labor respectively. For simplicity, we assume that first-stage consumption is a perfect substitute for second-stage consumption. A consumer, confronted with tax rates τ_k and τ_h , chooses $(c_1, k; c_2, l)$ to solve

$$\begin{aligned} \max U(c_1 + c_2, l) & \tag{14} \\ \text{s.t.} \quad c_1 + k & \leq \omega, \\ c_2 & \leq (1 - \tau_k)Rk + (1 - \tau_h)l. \end{aligned}$$

If the tax rate on capital τ_k is set so that $(1 - \tau_k)R = 1$, the consumer is indifferent about the timing of consumption. In such a case, the consumer saves his entire endowment.

⁷⁹Notice that the argument does not require that agents perfectly forecast future policies, only that they realize that the government has the option of changing policy in the future.

⁸⁰Modern Business Cycle Theories, edited by R. Barro. Chapter 7, “Time consistency and policy”.

The government sets proportional tax rates on capital and labor income to finance an exogenously given amount of second-stage per capita government spending G . The government's budget constraint is thus

$$G \leq \tau_k RK + \tau_h L, \quad (15)$$

where as usually uppercase symbols represent aggregate values. Assume that $G > R\omega$ so that even if consumers save their entire endowments and the tax on capital is set equal to one, the government still needs to tax labor.

Capital taxation with commitment:

(A celebrated result about optimal taxation with commitment in a very general setup can be found in appendix.)

In an economy with commitment, the government sets tax rates before private agents make their decisions. Let $x_1 = (c_1, k)$ and $x_2 = (c_2, l)$ denote an individual consumer's first- and second-stage allocations. Let $\pi = (\tau_k, \tau_h)$ denote government policy.

Definition 3 *A competitive equilibrium (X, π) is an individual allocation (x_1, x_2) , an aggregate allocation (X_1, X_2) and a tax policy π that satisfy*

1. Given the tax policy π , the individual allocations solve the consumer problem (14),
2. At the aggregate allocation (X_1, X_2) , the policy π satisfies the government budget constraint (15),
3. The individual and aggregate allocations coincide, $(x_1, x_2) = (X_1, X_2)$.

Let \mathcal{E} denote the set of policies π for which an equilibrium exists. Assume that for each π in \mathcal{E} , there is a unique equilibrium allocation $X(\pi)$. Let $S(\pi, X(\pi))$ denote the equilibrium value of utility under the policy π so that

$$S(\pi, X(\pi)) = U(C_1(\pi) + C_2(\pi), L(\pi)).$$

A pair (π, X) is a *Ramsey equilibrium* if π solves

$$\begin{aligned} & \max_{\pi \in \mathcal{E}} S(\pi, X(\pi)) \\ & \text{and } X = X(\pi). \end{aligned}$$

Proposition 4 *The Ramsey equilibrium (π, X) has first-stage allocation $C_1 = 0$ and $K = \omega$ and a capital tax rate $\tau_k = (R - 1)/R$.*

Proof. If the tax on capital is such that $(1 - \tau_k)R \geq 1$, then consumers save their entire endowments, while if $(1 - \tau_k)R < 1$, then they save nothing. The tax on capital acts like a lump-sum tax when it is selected at any level less than or equal to $(R - 1)/R$. Thus it is optimal to raise as much revenue as possible from this tax. Since $G > R\omega$, government spending is greater than the maximum possible revenues from this capital

tax, so it is optimal to set $\tau_k = (R - 1)/R$. Consumers thus save their entire endowments. The tax rate on labor τ_h is then set at a level sufficient to raise the rest of the revenues needed to finance G . ■

Capital taxation *without* commitment:

The lack of commitment is modeled by assuming that the government does not set policy until after consumers have made their decisions. The timing is (i) consumers make first-stage decisions, (ii) the government sets tax policy, and (iii) consumers make second-stage decisions. Thus, government tax rates depend on the aggregate first-stage decisions. A government policy is no longer a pair of tax rates, but a specification of tax rates for every possible X_1 , $\sigma(X_1) = [\tau_k(X_1), \tau_h(X_1)]$. Each consumer's second-stage decisions depend on the first-stage decisions x_1 (and X_1) and the tax policy selected. These second-stage decisions are described by a pair of functions $f_2(x_1, X_1, \pi) = [c_2(x_1, X_1, \pi), l(x_1, X_1, \pi)]$.

An equilibrium in this environment is defined recursively. First, a second-stage competitive equilibrium is defined, given the history of past decisions by consumers and the government. We consider symmetric histories so that $x_1 = X_1$. The resulting allocations are used to define the problem faced by the government. Next, the first-stage competitive equilibrium is defined. Combining all of these gives a time-consistent equilibrium.

Second-stage equilibrium:

A competitive equilibrium at the second stage, given the history (x_1, X_1, π) is a set of allocation rules $f_2(x_1, X_1, \pi)$ that satisfy

1. Given the history (x_1, X_1, π) , the individual allocation solves

$$\begin{aligned} & \max_{c_2, l} U(c_1 + c_2, l), \\ & s.t. \quad c_2 \leq (1 - \tau_k) Rk + (1 - \tau_h) l. \end{aligned}$$

2. Equality of individual and aggregate allocations.

Government's problem:

Given the past aggregate decisions X_1 and knowing the future decisions are selected according to a rule f_2 (or F_2) derived from the above problem, the government selects a policy $\pi = \sigma(X_1)$ that maximizes consumer welfare. The government's objective function is $U(C_1 + C_2(X_1, \pi), L(X_1, \pi))$, subject to its own budget constraint.

First-stage equilibrium:

Each consumer chooses an allocation for the first stage $x_1 = (c_1, k)$, together with an allocation rule $f_2(x_1, X_1, \pi)$ for actions in the second stage. Each consumer takes as given X_1 and that future policy is set according to the plan σ . The definition of the first-stage equilibrium is analogous to the definition of the second-stage equilibrium.

We have thus defined a “*time-consistent*” equilibrium, with sequential rationality built in both the private agents and the government.

Proposition 5 *The time-consistent equilibrium has first-stage allocations $C_1 = \omega$ and $K = 0$ and a capital tax plan $\tau_k(X_1) = 1$.*

Proof. Consider the policy plan σ . For any $X_1 = (C_1, K)$, it is optimal for the government to raise as much revenue as possible from taxing the given amount of capital. By assumption $G > R\omega$ so even if all the endowments are saved and the resulting capital is fully taxed, the revenues fall short of total spending. Thus $\tau_k(X_1) = 1$. Faced with such a tax, it is optimal for consumers to save nothing and consume all their endowments. The difference with the previous proof is now that X_1 is taken as given, the incentive is to tax capital fully, regardless of its level. ■

Proposition 6 *The utility level in the time-consistent equilibrium is strictly lower than in the Ramsey equilibrium.*

Proof. Let us compare the second stages of the Ramsey and the time-consistent equilibria. We already established that in the Ramsey equilibrium, $c_1 = 0$, $k = \omega$ and $\tau_k = (R - 1)/R$. Thus the second-stage Ramsey allocations (c_2, l) and τ_h solve

$$\begin{aligned} \max \quad & U(c_2, l), \\ & c_2 \leq \omega + (1 - \tau_h)l, \\ \text{s.t.} \quad & -\frac{U_l}{U_c} = 1 - \tau_h, \\ & G \leq (R - 1)\omega + \tau_h l. \end{aligned}$$

The government chooses the tax rate to maximize the consumer’s welfare, subject to its own budget constraint, with the additional constraints that (c_2, l) must satisfy the consumer’s first order conditions.

We also established that the first-stage time-consistent allocation is $c_1 = \omega$ and $\tau_k = 1$. Then the government’s problem in the time-consistent case is to set τ_h and l to solve

$$\begin{aligned} \max \quad & U(\omega + (1 - \tau_h)l, l), \\ \text{s.t.} \quad & -\frac{U_l}{U_c} = 1 - \tau_h, \\ & G \leq \tau_h l. \end{aligned}$$

The maximization problems for the time-consistent and the Ramsey second-stage allocations are essentially the same, except that the former has an “implicit” higher level of government expenditures, G as opposed to $G - (R - 1)\omega$. So, the resulting allocations should bring more utility in the Ramsey than the time-consistent allocations. ■

17.3 Can we improve from the time-consistent equilibrium?

Here we will only briefly sketch an argument of how, even without commitment technology, one can improve from the time-consistent equilibrium seen in section 17.2.3. This is based on Chari and Kehoe (1977).⁸¹

⁸¹ “Sustainable Plans”, JPE 1977.

Our notion of sustainable plans is that policies be sequentially rational. That is, the policy rules must maximize the social welfare function at each date given that agents behave optimally. Likewise, optimality on the part of private agents requires that they forecast future policies as being sequentially rational for society. One can also allow for allocations and policies to depend on the entire history of past decisions by governments as well as on past allocations. Thus, policies and allocations are history-contingent functions. When we impose sequential rationality, both government and consumers must be able to predict how current decisions affect future outcomes. Allowing for history dependence solves this forecasting problem.

For finite-horizon models, one can use backwards induction. It turns out that there is a unique time-consistent equilibrium, which is the sequence of the single-period time-consistent equilibrium. Of course, one cannot use backwards induction with infinite horizon models. There is actually a large set of time-consistent equilibria. These equilibria are based on trigger strategies. Define autarky as playing the single-period time-consistent plan defined in section 17.2.3, regardless of past history, i.e. reverting forever to it. In fact, autarky is the worst time-consistent equilibrium. The trigger strategy equilibria specify playing a pair of sequences (π, X) as long as these have been played in the past, and to revert to autarky if one of the parties has deviated. Of course, a few conditions are attached to the type of sequences that can be so sustained. In particular, (π, X) must be a competitive equilibrium. However, it can be shown that for high enough discount factor, even the Ramsey allocation can be supported. The idea is that the players will stick to an established pattern of behavior, even without commitment technology, because deviating from that pattern would be too costly, returning to autarky. A credible policy is thus one that is in the government's own interest to maintain.

Appendice

18 Notions d'analyse fonctionnelle nécessaires à la programmation dynamique

18.1 Espaces métriques

Nous commençons par introduire la notion d'espace métrique:

Definition 7 *Un espace métrique est constitué d'un ensemble S et d'une fonction $d(.,.)$, appelée une distance, où $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$. La distance d satisfait les propriétés suivantes:*

- (1) $\forall (x, y) \in S \times S, d(x, y) \geq 0$,
- (2) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- (3) $\forall (x, y) \in S \times S, d(x, y) = d(y, x)$,
- (4) $\forall (x, y, z) \in S \times S \times S, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La première propriété requiert que la distance soit une fonction positive. La deuxième requiert qu'elle ne prenne la valeur zéro qu'aux points (x, x) . Ainsi, les deux premières propriétés combinées impliquent que la distance entre deux points différents est toujours strictement positive. La troisième propriété est une forme de symétrie. La dernière est souvent appelée inégalité triangulaire. La raison pour laquelle ces fonctions sont appelées des distances devrait être claire.

Il peut être montré que les conditions (2)-(4) impliquent la condition (1). En fait, les conditions (3)-(4) sont suffisantes pour obtenir (1).

Exemples d'espaces métriques:

(a) Pour $1 \leq p \leq \infty$, soit $l_p[0, +\infty)$ l'ensemble des suites de nombres complexes $\{x_t\}_{t=0}^{+\infty}$ telles que la somme $\sum_{t=0}^{+\infty} |x_t|^p$ converge. La fonction $d_p(x, y) = \left(\sum_{t=0}^{+\infty} |x_t - y_t|^p \right)^{1/p}$ est une distance. $(l_p[0, +\infty), d_p)$ est donc un espace métrique.

(a') Un cas particulier, souvent utilisé, est $l_2[0, +\infty)$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{t=0}^{+\infty} |x_t - y_t|^2}$.

(b) Un autre cas dérivé est $S = l_\infty[0, \infty)$, l'ensemble des suites bornées $\{x_t\}_{t=0}^{+\infty}$ de nombres complexes ou réels. La distance est $d_\infty(x, y) = \sup_t |x_t - y_t|$.

(c) Soit $S = C[0, T]$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Nous y associons la distance

$$d_p(f, g) = \left[\int_0^T |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

(c') Un cas dérivé est l'espace métrique constitué de l'ensemble $S = C[0, T]$ et de la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - g(t)|.$$

Nous introduisons maintenant la notion de *séquence de Cauchy* et de *limite d'une suite*.

Definition 8 Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique (S, d) est une suite de Cauchy si: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, pour tout $m, n \geq N$.

Definition 9 Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique (S, d) converge vers une limite x_0 si: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, pour tout $n \geq N$.

Lemma 10 Soit une suite convergente $\{x_n\}$ dans un espace métrique (S, d) . Alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

Proof. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in S$ la limite de la suite $\{x_n\}$. Il existe donc N tel que $d(x_0, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $i \geq N$. L'inégalité triangulaire implique que $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m)$. Ainsi pour tout $m, n \geq N$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. La suite $\{x_n\}$ est donc aussi une suite de Cauchy. ■

Ainsi, toute suite convergente est une suite de Cauchy. Il se trouve qu'une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente cependant. Nous allons voir cela à travers un exemple.

Prenons d'abord l'espace métrique $(C[0, 1], d_2)$. Nous considérons donc l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et la distance $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt}$. Prenons la séquence de fonctions $f_n(t) = t^n$. Cette suite converge simplement⁸² vers la fonction

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $(C[0, 1], d_2)$. En effet,

$$d_2(f_m, f_n)^2 = \int_0^1 (t^m - t^n)^2 dt = \left[\frac{t^{2m+1}}{2m+1} - 2 \frac{t^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2m+1} - \frac{2}{m+n+1} + \frac{1}{2n+1}.$$

Comme chacune de ces quantités peut être ramenée aussi petite que l'on veut par un choix approprié de m et de n , il est possible de choisir N tel que $d_2(f_m, f_n) < \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N$. La suite $\{f_n\}$ est donc une suite de Cauchy. Remarquez toutefois que la fonction f_0 vers laquelle la suite converge n'appartient pas à l'espace métrique car elle n'est pas continue au point $t = 1$.

(Il peut être aussi démontré qu'une suite peut être une suite de Cauchy avec une certaine distance, mais pas avec une autre distance.)

⁸²Par «simplement», nous voulons dire point par point (ou «pointwise»). Cela par opposition à la convergence *uniforme*.

Definition 11 *Un espace métrique (S, d) est complet si toute suite de Cauchy définie sur (S, d) converge dans (S, d) .*

Exemples d'espaces métriques complets:

(a) Les espaces métriques suivants sont complets

$$\left\{ \begin{array}{l} (l_p[0, \infty), d_p), \quad 1 \leq p < \infty, \\ l_\infty[0, \infty), d_\infty), \\ C[0, T], d_\infty). \end{array} \right.$$

(b) L'espace métrique $(C[0, T], d_p)$ n'est pas complet ($1 \leq p < \infty$).

(c) L'espace métrique constitué de l'intervalle ouvert $(0, 1)$ et de la distance $d(x, y) = |x - y|$ (valeur absolue) n'est pas complet.

18.2 Opérateurs

Definition 12 *Un opérateur est une fonction d'un espace métrique (S, d) dans lui-même.*

Definition 13 *Soit $T : S \rightarrow S$ un opérateur d'un espace métrique (S, d) . L'opérateur T est continu en un point $x_0 \in S$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ lorsque $d(x, x_0) < \eta$.*

Definition 14 *Un opérateur T est continu s'il est continu en tout point de S .*

Nous sommes particulièrement intéressés par les opérateurs ayant la propriété de prendre n'importe quels deux points et de les rapprocher l'un de l'autre.

Definition 15 *Soit (S, d) un espace métrique et $T : S \rightarrow S$. L'opérateur T est une application contractante (ou une contraction) de module k s'il existe un réel $k \in [0, 1)$ tel que*

$$d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S \times S.$$

Lemma 16 *Une contraction est un opérateur continu.*

Proof. *Si $k = 0$, alors l'opérateur est une fonction constante et est donc clairement continu. Si $k > 0$, alors se référant à la définition de la continuité en un point, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/k$ pour obtenir continuité en tout point. ■*

Nous avons le théorème suivant, dit de l'application contractante.

Theorem 17 Soit (S, d) un espace métrique complet et $T : S \rightarrow S$ une contraction. Il existe alors un point fixe unique $x_0 \in S$ tel que $T(x_0) = x_0$. De plus, prenant un point quelconque $x \in S$, et définissant la suite $\{x_n\}$ de façon inductive par $x_1 = T(x)$, $x_2 = T(x_1), \dots$, $x_{n+1} = T(x_n)$, alors la suite $\{x_n\}$ converge vers le point fixe x_0 .

Proof. Soit x un point quelconque dans S . Définissons $x_1 = T(x)$, $x_2 = T(x_1), \dots$. On peut alors exprimer $x_n = T^n(x)$. Nous montrons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Supposons sans perte de généralité que $n > m$. Alors,

$$d(x_m, x_n) = d(T^m(x), T^n(x)) = d(T^m(x), T^m(x_{n-m})) \leq kd(T^{m-1}(x), T^{m-1}(x_{n-m})).$$

Par induction, nous obtenons

$$d(x_m, x_n) \leq k^m d(x, x_{n-m}).$$

Puisque d est une distance, nous pouvons utiliser l'inégalité triangulaire pour arriver à

$$d(x_m, x_n) \leq k^m [d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-m-1}, x_{n-m})].$$

Puisque $d(x_m, x_n) \leq k^m d(x, x_{n-m})$ pour tout $m < n$, alors $d(x_i, x_{i+1}) \leq k^i d(x, x_1)$ et donc

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq k^m [d(x, x_1) + kd(x, x_1) + \dots + k^{n-m-1}d(x, x_1)], \\ &\leq k^m [1 + k + \dots + k^{n-m-1}] d(x, x_1), \\ &\leq k^m \frac{1-k^{n-m}}{1-k} d(x, x_1), \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x, x_1). \end{aligned}$$

Puisque $k < 1$, le côté droit de l'inégalité peut être ramené sous n'importe quel $\varepsilon > 0$ donné, en choisissant un m suffisamment élevé. Par conséquent, $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ quand $m, n \rightarrow +\infty$. La suite $\{x_n\}$ est donc une suite de Cauchy. Comme l'espace métrique est complet, la suite $\{x_n\}$ converge dans S .

Soit x_0 la limite de la suite $\{x_n\} = \{T^n(x)\}$. Cette limite est le point fixe de T . Puisque l'opérateur T est continu, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$. Comme $T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = T(x_0)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x_0$, on en déduit que $T(x_0) = x_0$.

Finalement, nous vérifions que ce point fixe est unique. Pour cela, supposons au contraire qu'il existe un autre point fixe $y_0 \neq x_0$. Dans ce cas,

$$0 < d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq kd(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

une impossibilité.

(la première inégalité est due au fait que d est une distance et que $y_0 \neq x_0$; l'égalité reflète que x_0 et y_0 sont supposés être des points fixes; la deuxième inégalité est due au fait que l'opérateur T est une contraction de module k ; la dernière inégalité est vraie car le module $k < 1$.) ■

Considérons désormais des espaces de fonctions, comme par exemple $C[0, T]$.

Definition 18 Soit S un espace de fonctions définies sur un domaine donné et deux éléments f, g de S . On dit que $f \geq g$ si et seulement si $f(t) \geq g(t)$ pour tout t dans le domaine des fonctions.

Nous utilisons la distance $d_\infty(f, g) = \sup_t |f(t) - g(t)|$ où le supremum est pris sur le domaine commun des fonctions.

Nous énonçons le théorème suivant:

Theorem 19 (Théorème de Blackwell) Soit T un opérateur sur un espace métrique de fonctions (S, d_∞) , avec les propriétés suivantes:

(a) (monotonie) Pour tout $(f, g) \in S \times S$, $f \geq g$ implique que $T(f) \geq T(g)$,

(b) (escompte) Soit c une fonction réelle constante (égale à c). Pour tout réel positif c et pour tout $f \in S$, $T(f + c) \leq T(f) + \beta c$ pour un $\beta \in [0, 1]$.

Alors, l'opérateur T est une application contractante de module β .

Proof. Nous avons que $\forall t, f(t) - g(t) \leq |f(t) - g(t)| \leq d_\infty(f, g)$ et donc $f - g \leq d_\infty(f, g)$ ou $f \leq g + d_\infty(f, g)$. Utilisant la propriété de monotonie, nous obtenons que $T(f) \leq T(g + d_\infty(f, g))$. Par la propriété d'escompte, on en déduit que $T(f) \leq T(g) + \beta d_\infty(f, g)$ et donc $T(f) - T(g) \leq \beta d_\infty(f, g)$. Par le même raisonnement, $g \leq f + d_\infty(f, g)$ et procédant similairement, nous arrivons à $T(g) - T(f) \leq \beta d_\infty(f, g)$. Il s'en suit que $\forall t, |T(f)(t) - T(g)(t)| \leq \beta d_\infty(f, g)$ et donc $d_\infty(T(f), T(g)) \leq \beta d_\infty(f, g)$. Ainsi, l'opérateur T est bien une contraction de module β . ■

19 Le concept d'équilibre compétitif récursif

Nous définissons un problème d'équilibre. Il est important de faire une différence entre les variables d'état agrégées et les variables d'état individuelles. Nous définissons aussi les variables de contrôle. Nous ne redéfinissons pas l'environnement qui est standard.

Variable d'état individuelle: k_t (capital possédé par le ménage représentatif).

Variabes d'état agrégées: z_t, K_t (capital total dans l'économie).

Variabes de contrôle: k_{t+1}, h_t .

Problème de la firme:

Chaque période, la firme choisit capital et travail de façon à maximiser ses profits. Son problème est statique: puisqu'elle ne possède aucun de ses facteurs de production, la firme n'a pas à considérer l'effet de ses décisions sur la période suivante. Ainsi, son problème est de

$$\forall t, \max_{h_t, k_t} \pi_t = e^{z_t} f(h_t, k_t) - w_t h_t - r_t k_t.$$

Les CPOs sont données par

$$e^{z_t} f_1(h_t, k_t) = w_t, \tag{16}$$

et

$$e^{z_t} f_2(h_t, k_t) = r_t. \quad (17)$$

Ces deux équations définissent les demandes individuelles, en fonction des prix des facteurs. Puisque la fonction de production a des rendements d'échelle constants, les firmes font zéro profit à l'équilibre. Les variables agrégées H_t and K_t satisfont (16) et (17) si le nombre de firmes est normalisé à 1. Ainsi, (16) et (17) impliquent que

$$w_t = \hat{w}(z_t, H_t, K_t), \quad (18)$$

et

$$r_t = \hat{r}(z_t, H_t, K_t). \quad (19)$$

Les équations (18)-(19) représentent les conditions d'équilibre des marchés des facteurs, déterminant les prix.

Problème du ménage représentatif:

Le ménage représentatif maximise son utilité à horizon infini et⁸³

$$\max_{\{k_{t+1}, h_t\}} E \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t)$$

$$t.q. \quad c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t h_t + r_t k_t, \forall t,$$

étant donné un processus stochastique pour w_t, r_t , étant donné k_0 .

Le ménage doit prendre des anticipations sur les variables futures qui vont affecter ses décisions intertemporelles. Nous supposons que le ménage anticipe que les prix des facteurs sont des fonctions de z_t, K_t et H_t (toutes des variables agrégées), comme indiqué par le problème des firmes. Nous supposons ainsi qu'ils connaissent (18) et (19) (rappelez vous que h_t est une variable de contrôle, mais pas H_t). Supposant également que tous les ménages se comportent, comme lui, aussi de façon optimale, le ménage représentatif anticipe rationnellement que

$$H_t = H(z_t, K_t), \quad (20)$$

et

$$K_{t+1} = K(z_t, K_t), \quad (21)$$

(et que

$$z_{t+1} = z(z_t, \varepsilon_t). \quad (22)$$

Utilisant (20), le ménage représentatif anticipe que les salaires et les rendements du capital dans le futur sont des fonctions des variables d'état agrégées seulement,

$$w_t = w(z_t, K_t), \quad (23)$$

⁸³Puisque les firmes ne font pas de profits à l'équilibre, il n'est pas besoin de rajouter les dividendes des firmes à la contrainte de budget des ménages.

et

$$r_t = r(z_t, K_t). \quad (24)$$

Une fois toutes ces relations anticipées, le ménage représentatif peut résoudre son problème de maximisation. Les anticipations sont rationnelles dans le sens que $K_{t+1} = K(z_t, K_t)$, $z_{t+1} = z(z_t, \varepsilon_t)$, $w_t = w(z_t, K_t)$ et $r_t = r(z_t, K_t)$ sont connues par l'agent représentatif (bien sûr, ce qui est connu sont les lois de transition pour K_{t+1} et z_{t+1} , ainsi que les prix des facteurs comme fonctions des variables d'état agrégées, mais pas les séquences futures réalisées).

A cause de sa nature récursive, le problème de maximisation du ménage représentatif peut s'écrire comme:

$$v(z_t, k_t, K_t) = \max_{h_t, k_{t+1}} \{u(w_t h_t + r_t k_t + (1 - \delta) k_t - k_{t+1}, 1 - h_t) + \beta E_\varepsilon [v(z_{t+1}, k_{t+1}, K_{t+1}) | z_t]\}, \quad (25)$$

où

$$\begin{cases} w_t = w(z_t, K_t), \\ r_t = r(z_t, K_t), \\ K_{t+1} = K(z_t, K_t), \\ z_{t+1} = z(z_t, \varepsilon_t), \\ z_0, k_0, K_0 \text{ donnés.} \end{cases}$$

La solution à ce problème est

$$\begin{cases} h_t = h(z_t, k_t, K_t), \\ k_{t+1} = k(z_t, k_t, K_t). \end{cases}$$

Definition 20 *Un équilibre compétitif récursif est une liste comprise (i) d'une fonction de valeur $v(z_t, k_t, K_t)$, (ii) de règles de décision individuelles $h_t(z_t, k_t, K_t)$ et $k_{t+1}(z_t, k_t, K_t)$ pour le ménage représentatif, (iii) de règles de transition agrégée $H_t(z_t, K_t)$ et $K_{t+1}(z_t, K_t)$, et (iv) de prix des facteurs $w_t(z_t, K_t)$ et $r_t(z_t, K_t)$ tels que:*

- (i) le ménage représentatif maximise son problème, i.e. $h_t(z_t, k_t, K_t)$, et $k_{t+1}(z_t, k_t, K_t)$ résolvent (25),
- (ii) la firme représentative maximise ses profits et les marchés des facteurs sont équilibrés, i.e. $e^{z_t} f_1(H_t, K_t) = w_t(z_t, K_t)$
et $e^{z_t} f_2(H_t, K_t) = r_t(z_t, K_t)$,
- (iii) il y a consistance entre les décisions individuelles et les lois agrégées, i.e. $h_t(z_t, K_t, K_t) = H_t(z_t, K_t)$
et $k_{t+1}(z_t, K_t, K_t) = K_{t+1}(z_t, K_t)$,
- (iv) la contrainte de ressource agrégée est satisfaite, i.e. $C(z_t, K_t) + I(z_t, K_t) = Y(z_t, K_t)$.

Remarque: La condition (iii) doit être satisfaite car tous les ménages sont semblables (et la masse totale est 1). Le ménage typique doit être typique à l'équilibre. Cependant, cela ne peut lui être imposé lorsqu'il prend

sa décision. Les prix s'ajustent de telle façon que le ménage choisit une offre de travail et un investissement compatibles avec la condition (iii).

Le concept utilisé pour construire cet équilibre compétitif récursif est illustré en figure 1.

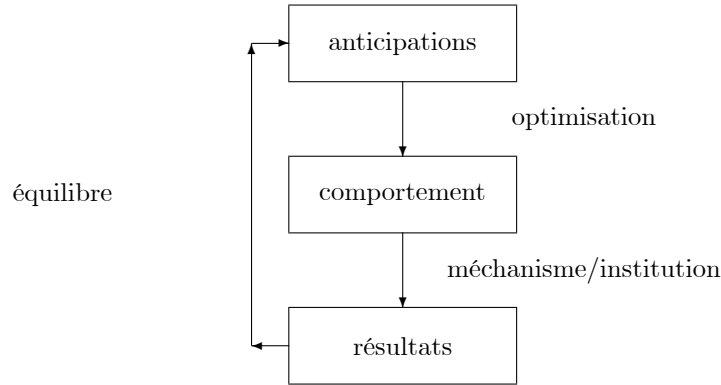


Figure 1: Concept d'équilibre compétitif récursif

20 Choix des formes fonctionelles pour la technologie et les préférences

20.1 Fonction de production et sentier équilibré

Le sentier de croissance équilibrée est par définition le sentier où tous les taux de croissance sont constants, sauf pour le travail qui est borné. Supposez qu'il y ait du progrès technologique permanent X_t . Nous nous restreignons au cas où le composant technologique est "labor augmenting" car c'est nécessaire pour obtenir un sentier de croissance équilibrée. Ainsi, X_t affecte les unités d'efficacité du travail

$$f(H_t, K_t, X_t) = f(X_t H_t, K_t).$$

Le long du sentier de croissance équilibrée, $H_t = \bar{H}$. Dénotons par g les taux de croissance. Alors, $g_X = X_{t+1}/X_t$, $g_K = K_{t+1}/K_t$, $g_C = C_{t+1}/C_t$, $g_I = I_{t+1}/I_t$, $g_Y = Y_{t+1}/Y_t$.

Ecrivons la contrainte de ressource aux dates t et $t + 1$,

$$\begin{cases} C_t + I_t = Y_t, \\ g_C C_t + g_I I_t = g_Y Y_t, \end{cases}$$

et donc

$$g_C C_t + g_I I_t = g_Y C_t + g_Y I_t.$$

Ainsi, pour tout t ,

$$(g_C - g_Y)C_t + (g_I - g_Y)I_t = 0.$$

Pour que cette égalité soit satisfaite pour tout t , il faut que C_t et I_t croissent au même taux. Si ce n'était pas le cas, l'équation ci-dessus ne pourrait être satisfaite pour tout t , à moins que les deux coefficients soient égaux à zéro, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, $g_C = g_I$. Cela implique alors que $(g_C - g_Y)(C_t + I_t) = 0$ et donc $g_C = g_Y$.

Nous avons que $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$. Donc,

$$g_K = 1 - \delta + \frac{I_t}{K_t},$$

et donc I_t/K_t est constant pour tout t et $g_K = g_I$. Finalement, $Y_t = f(X_t H_t, K_t) = f(X_t \bar{H}, K_t)$. A cause des rendements d'échelle constants de f

$$g_Y = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{f(X_{t+1} \bar{H}, K_{t+1})}{f(X_t \bar{H}, K_t)} = \frac{f(g_X X_t \bar{H}, g_K K_t)}{f(X_t \bar{H}, K_t)}.$$

La seule façon que cette expression puisse être constante pour tout t est que $g_X = g_K$. Alors,

$$g_X = g_I = g_Y = g_C = g_K.$$

Ainsi, un sentier de croissance équilibrée requiert que les taux de croissance soient constants. Étant donné la structure de l'économie, c'est suffisant pour conclure qu'ils soient aussi égaux.

Cela est aussi consistant avec les faits de Kaldor: (i) le PIB réel croît à un taux plus ou moins constant, (ii) le stock de capital croît à un taux plus ou moins constant, plus élevé que celui du travail, (iii) les taux de croissance du capital et du PIB sont à peu près les mêmes.

20.2 Restriction sur la fonction d'utilité

Le modèle néo-classique peut être résolu avec n'importe quelle fonction d'utilité. Nous aimerions utiliser les données empiriques pour limiter les classes de fonction consistantes avec ces données. Nous allons utiliser l'observation que l'offre agrégée de travail au long-terme est constante (bien que la productivité et donc les salaires aient beaucoup augmenté).⁸⁴ La question est: "quel type de fonction d'utilité doit-on utiliser pour être consistant avec (i) un sentier de croissance équilibrée et (ii) une offre de travail constante au long-terme?".

Attention: ce que nous cherchons ici est une (classe de) fonction(s) d'utilité. Nous allons donc chercher une équation fonctionnelle qui limite les fonctions d'utilité possibles.

⁸⁴On peut un traitement général dans King, Plosser et Rebelo (1988).

Supposez que nous ayons à résoudre⁸⁵

$$\begin{cases} v(k_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \{u(c_t, 1 - h_t) + \beta v(k_{t+1})\}, \\ t.q. c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = f(X_t h_t, k_t). \end{cases}$$

Nous cherchons des fonctions d'utilité où le travail est borné à \bar{h} et où les autres variables croissent au taux g du progrès technologique X_t (pour simplifier, nous considérons qu'il n'y a pas de croissance démographique). Les CPOs

$$\begin{cases} u_1(c, 1 - \bar{h}) = \beta [\bar{f}_2 + 1 - \delta] u_1(gc, 1 - \bar{h}), \\ g^t \bar{f}_1 u_1(c, 1 - \bar{h}) = u_2(c, 1 - \bar{h}). \end{cases} \quad (26)$$

Ce sont les CPOs habituelles. Les produits marginaux du travail (\bar{f}_1) et du capital (\bar{f}_2) sont constants le long du sentier de croissance équilibrée, à cause des rendements d'échelle constants sur la fonction de production (puisque'ils ne dépendent que du ratio entre les facteurs effectifs). X_t a été normalisé à g^t . En différentiant la première équation de (26) par rapport à c , puis en écrivant le ratio $-c \frac{u_{11}(c, 1 - \bar{h})}{u_1(c, 1 - \bar{h})}$ à $c_{t+1} = gc_t$, nous pouvons vérifier que le ratio doit rester constant le long du sentier de croissance équilibrée, même lorsque la consommation croît. Ce terme est le coefficient d'aversion relative au risque, que nous dénotons σ . Cette famille de fonctions d'utilité est appelée *CRRA* (constant relative risk aversion).

Cette égalité représente une équation différentielle à résoudre.⁸⁶ On obtient:

$$\begin{cases} u(c, 1 - h) = a(1 - h)c^{1-\sigma} + b(1 - h), & \text{si } \sigma \neq 1, \\ u(c, 1 - h) = d(1 - h)\ln c + e(1 - h), & \text{si } \sigma = 1. \end{cases}$$

De même, si nous utilisons la restriction sur u que nous venons d'obtenir pour retrouver $u_1(c, 1 - h)$ et $u_2(c, 1 - h)$, nous voyons que la deuxième équation de (26) ne peut être satisfaite que si $b'(1 - h) = 0$ si $\sigma \neq 1$ et que si $d'(1 - h) = 0$ si $\sigma = 1$. En conclusion,

$$\begin{cases} u(c, 1 - h) = a(1 - h)c^{1-\sigma}, & \text{si } \sigma \neq 1, \\ u(c, 1 - h) = \ln(c) + e(1 - h), & \text{si } \sigma = 1. \end{cases}$$

Pour une fonction d'utilité CRRA, l'effet de revenu ($h \downarrow$) d'une augmentation du salaire annule l'effet de substitution ($h \uparrow$), ce qui reproduit bien l'observation d'une offre de travail agrégée constante au long-terme, malgré une augmentation importante des salaires.

⁸⁵Dans un environnement sans distorsion, ni externalité, nous pouvons considérer le problème optimal.

⁸⁶À partir de $-c \frac{u_{11}(c, 1 - h)}{u_1(c, 1 - h)} = \sigma$, nous obtenons $c \frac{du_1}{dc} = -\sigma u_1$, donc $d \ln u_1 = -\sigma d \ln c$, donc $\ln u_1 = -\sigma \ln c + b(1 - h)$, donc $u_1 = a(1 - h)c^{-\sigma}$ et finalement $u = a(1 - h)c^{1-\sigma} + b(1 - h)$. Remarquez que nous utilisons $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ de manière générique, comme "fonctions de $(1 - h)$ ". Le cas $\sigma = 1$ peut être traité de façon similaire.

Avec cette classe de fonctions, on peut calculer l'élasticité de substitution intertemporelle (“ η_{inter} ”), ainsi que l'élasticité de substitution intratemporelle (“ η_{intra} ”). Supposez que vous résolviez le problème d'équilibre suivant (variable d'état: k_t , variable de controle: h_t, k_{t+1}):

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \{u(c_t, 1 - h_t) + \beta v(k_{t+1})\},$$

où $w_t h_t + r_t k_t = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t$. Les CPOs sont

$$\begin{cases} U_c \cdot w = U_l, \\ U_c^t = \beta U_c^{t+1} \cdot (r_{t+1} + 1 - \delta). \end{cases} \quad (27)$$

Ainsi, le taux marginal de substitution entre la consommation et le loisir cette période est $TMS_{c_t, l_t} \equiv U_l / U_c = w$, et le taux marginal de substitution entre la consommation cette période et la période suivante est $TMS_{c_t, c_{t+1}} \equiv U_c^t / \beta U_c^{t+1} = 1 + r_{t+1} - \delta$. On peut alors définir les deux élasticités comme:

$$\begin{cases} \eta_{inter} = \frac{d \ln(c_{t+1}/c_t)}{d \ln(TMS_{c_t, c_{t+1}})}, \\ \eta_{intra} = \frac{d \ln(c_t/l_t)}{d \ln(TMS_{c_t, l_t})}. \end{cases}$$

Avec une fonction d'utilité CRRA, $U_c = c^{-\sigma} g(l)$ et $U_l = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} g'(l)$. Donc, $TMS_{c_t, c_{t+1}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\sigma \frac{g(l_t)}{g(l_{t+1})}$ et $TMS_{c_t, l_t} = \frac{1}{1-\sigma} \frac{c_t}{l_t} \frac{l_t g'(l_t)}{g(l_t)}$. Alors,

$$\begin{cases} \eta_{inter} = \frac{1}{\sigma}, \\ \eta_{intra} = 1. \end{cases}$$

21 Chaînes de Markov

Un processus stochastique est une séquence aléatoire de vecteurs.

Definition 21 *Un processus stochastique $\{x_t\}$ a la propriété de Markov si pour tout $k \geq 1$ et tout t ,*

$$\Pr(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k}) = \Pr(x_{t+1} | x_t).$$

Nous supposons que le processus a la propriété de Markov et allons le caractériser par une *chaîne de Markov*. Une chaîne de Markov invariante au temps est définie par: (i) un vecteur \bar{x} de dimension $n \times 1$, qui représente les valeurs possibles, (ii) une matrice de transition P de dimension $n \times n$ qui représente les probabilités de passer d'un état à un autre, et (iii) un vecteur π_0 de dimension $n \times 1$ qui représente les probabilités d'être dans l'état i à la date 0.

Le vecteur π_0 est interprété comme $\pi_{0i} = \Pr(x_0 = \bar{x}_i)$. La matrice P a l'interprétation que $P_{ij} = \Pr(x_{t+1} = \bar{x}_j | x_t = \bar{x}_i)$. Bien sûr, nous supposons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \\ \sum_{i=1}^n \pi_{0i} = 1. \end{array} \right.$$

On dit qu'une telle matrice P est une *matrice stochastique*.⁸⁷

La matrice P détermine les probabilités de passer de n'importe quelle valeur de la variable d'état vers n'importe quelle autre valeur en une période. Pour calculer ces mêmes probabilités sur deux périodes, il faut "appliquer" la matrice P deux fois:

$$\Pr(x_{t+2} = \bar{x}_j | x_t = \bar{x}_i) = \sum_{h=1}^n \Pr(x_{t+2} = \bar{x}_j | x_{t+1} = \bar{x}_h) \Pr(x_{t+1} = \bar{x}_h | x_t = \bar{x}_i) = \sum_{h=1}^n P_{ih} P_{hj} = P_{ij}^2,$$

où la matrice $P^2 \equiv P \times P$. En itérant autant de fois que nécessaire,

$$\Pr(x_{t+k} = \bar{x}_j | x_t = \bar{x}_i) = \sum_{h=1}^n \Pr(x_{t+k} = \bar{x}_j | x_{t+k-1} = \bar{x}_h) \Pr(x_{t+k-1} = \bar{x}_h | x_t = \bar{x}_i) = \sum_{h=1}^n P_{ih}^{k-1} P_{hj} = P_{ij}^k,$$

où la matrice $P^k \equiv P^{k-1} \times P$. Bien sûr, P^k est aussi de dimension $n \times n$.

La distribution de probabilité inconditionnelle de x_t après k périodes est ainsi donnée par

$$\Pr(x_k) = \underbrace{\pi_k^T}_{(1 \times n)} = \underbrace{\pi_0^T \cdot P^k}_{(1 \times n)(n \times n)},$$

où T représente la transposée. Le vecteur $\Pr(x_t)$ a pour $j^{\text{ème}}$ élément la probabilité $\Pr(x_t = \bar{x}_j)$.⁸⁸

Bien sûr, les distributions de probabilité inconditionnelles suivent

$$\pi_{t+1}^T = \pi_t^T P.$$

Définition: Une distribution est *stationnaire* si l'on a

$$\pi_{t+1} = \pi_t.$$

⁸⁷Précisément, une matrice stochastique est une matrice carrée à éléments non-négatifs et telle que la somme des éléments de chaque ligne égale 1, i.e.

$$P = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ où } \forall (i, j), P_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i, \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1.$$

⁸⁸En effet, développant cette expression, le $j^{\text{ème}}$ élément de π_k^T est le produit de π_0^T par la $j^{\text{ème}}$ colonne de P^k , ou

$$\Pr(x_0 = \bar{x}_1) P_{1j}^k + \dots + \Pr(x_0 = \bar{x}_n) P_{nj}^k.$$

Si c'est le cas, alors

$$\pi^T = \pi^T P \quad \text{ou} \quad \pi^T (I_n - P) = 0 \quad \text{ou} \quad (I_n - P^T)\pi = 0,$$

après transposition. Ceci détermine π comme un vecteur propre (normalisé de façon à ce que $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$) associé à la valeur propre unité de P^T . Il peut être démontré que comme P est une matrice stochastique (à éléments positifs dont la somme par ligne est égale à 1), il y a au moins une valeur propre égale à 1 et que donc il y a un vecteur π satisfaisant la condition ci-dessus.⁸⁹

On peut se poser la question suivante: pour une distribution initiale arbitraire π_0 , est-ce que les distributions inconditionnelles π_t approchent une distribution stationnaire, i.e. étant donné π_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \pi_\infty \quad \text{où} \quad \pi_\infty \text{ satisfait l'équation } (I_n - P^T)\pi = 0?$$

Si la réponse à cette question est oui, alors est-ce que la distribution limite π_∞ dépend de la distribution initiale π_0 ? Si la limite est indépendante de π_0 , alors on dit que le processus stochastique est *asymptotiquement stationnaire avec une distribution invariante unique*.

Theorem 22 *Soit une matrice stochastique avec $P_{ij} > 0$ pour tout (i, j) . Alors, P a une distribution stationnaire unique et le processus stochastique est asymptotiquement stationnaire.*

Remarque: Ce théorème non seulement garantit qu'il y a une distribution stationnaire unique (sous des conditions peu contraignantes), mais il nous dit comment trouver cette distribution - par application successives de la matrice P et ceci quelle que soit la distribution initiale.

22 Filtre Hodrick-Prescott

Supposez que vous ayez une série temporelle $\{S_t\}_{t=1}^T$. Vous voulez la séparer entre une tendance T_t et une composante cyclique C_t , de telle sorte que $S_t = T_t + C_t$ pour tout $t \in \{1, \dots, \tau\}$. Puisque la série $\{S_t\}$ est

⁸⁹Il peut y avoir plusieurs valeurs propres égales à 1 et donc plusieurs solutions π .

Par exemple (SL, p. 4), si

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors il y a deux valeurs propres égales à l'unité et donc deux distributions stationnaires $\pi^T = [1 \quad 0 \quad 0]$ et $\pi^T = [0 \quad 0 \quad 1]$.

Par contre, si

$$P = \begin{bmatrix} .7 & .3 & 0 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & .9 & .1 \end{bmatrix}$$

alors il n'y a qu'une seule distribution stationnaire $\pi^T = [0 \quad .6429 \quad .3571]$.

donnée, trouver la tendance ou la composante cyclique est bien sûr équivalent. Nous cherchons donc la série $\{T_t\}_{t=1}^\tau$ qui minimise la fonction suivante:

$$\min_{\{T_t\}_{t=1}^\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (S_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{\tau-1} [(T_{t+1} - T_t) - (T_t - T_{t-1})]^2.$$

Le paramètre λ est donné. Il s'agit donc de déterminer τ valeurs. Le premier terme pénalise la variabilité de la composante cyclique, tandis que le second terme pénalise les variations abruptes dans le terme de tendance.

On peut tout de suite vérifier que quand $\lambda = 0$, la tendance devient la série originelle ($T_t = S_t$ pour tout t). Quand $\lambda \rightarrow \infty$, la tendance se rapproche d'une tendance linéaire ($T_{t+1} - T_t = T_t - T_{t-1}$, pour tout t). Pour des données trimestrielles, il est coutumier de prendre $\lambda = 1600$.⁹⁰ Le coefficient est $\lambda = 100$ pour les données annuelles.

Dans le cas où $0 < \lambda < \infty$, on peut dériver les CPOs en $\{T_1, \dots, T_\tau\}$ de ce problème.⁹¹ Cela va nous donner un système (linéaire) de τ équations et τ inconnues.

Commençons par développer cette fonction que l'on peut voir comme une fonction de τ variables, $G(T_1, \dots, T_\tau)$. Ainsi,

$$G(T_1, \dots, T_\tau) = \sum_{t=1}^{\tau} (S_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{\tau-1} (T_{t+1} - 2T_t + T_{t-1})^2.$$

Remarquez que dans cette fonction de $\{T_1, \dots, T_\tau\}$ apparaissent aussi les observations $\{S_t\}_{t=1}^\tau$. Cette fonction est quadratique et les CPO donneront donc ainsi un système linéaire à résoudre.

Il est utile de réécrire cette fonction en focalisant sur les termes où la variable générique τ_i apparaît:

$$G(T_1, \dots, T_\tau) = \dots + (S_i - T_i)^2 + \lambda(T_{i+2} - 2T_{i+1} + T_i)^2 + \lambda(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})^2 + \lambda(T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2})^2 + \dots$$

Nous traiterons les cas $T_1, T_2, T_{\tau-1}$ et T_τ séparément, puisque dans ces cas là, moins de termes apparaissent. Nous obtenons alors pour $i = 3, \dots, \tau - 2$,

$$G_{T_i} = -2(S_i - T_i) + 2\lambda(T_{i+2} - 2T_{i+1} + T_i) - 4\lambda(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + 2\lambda(T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}) = 0, \quad CPO [T_i].$$

Cette dernière expression devient

$$T_i + \lambda(T_{i+2} - 2T_{i+1} + T_i) - 2\lambda(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \lambda(T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}) = S_i.$$

⁹⁰Si la série était stationnaire, alors ce choix de λ éliminerait les fluctuations plus basses que 8 années. (Il est coutumier de voir les fluctuations cycliques comme des fluctuations avec des fréquences de 3 à 5 ans).

Il peut y avoir des variations au moyen terme dans la croissance (ex: années 60s vs. années 2000), donc si l'on veut s'intéresser aux variations à la fréquence du cycle, il faut se débarrasser de ces variations là.

⁹¹Nous supposons que ces conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Anticipant un système linéaire à résoudre et donc anticipant de pouvoir réécrire le système entier sous forme matricielle, nous exprimons cette CPO $[T_i]$ comme:

$$\begin{bmatrix} \dots & \lambda & -4\lambda & 1+6\lambda & -4\lambda & \lambda & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ T_{i-2} \\ T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ T_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ S_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Minimisons aussi la fonction d'objectif par rapport à T_1 (cas symétrique pour T_τ) et par rapport à T_2 (cas symétrique pour $T_{\tau-1}$). On exprime

$$G(T_1, \dots, T_T) = (S_1 - T_1)^2 + \lambda(T_3 - 2T_2 + T_1)^2 + (S_2 - T_2)^2 + \lambda(T_4 - 2T_3 + T_2)^2 + \dots$$

Les CPO $[T_1]$ et CPO $[T_2]$ sont

$$\begin{cases} -2(S_1 - T_1) + 2\lambda(T_3 - 2T_2 + T_1) = 0, \\ -2(S_2 - T_2) - 4\lambda(T_3 - 2T_2 + T_1) + 2\lambda(T_4 - 2T_3 + T_2) = 0. \end{cases}$$

Celles-ci peuvent se réécrire

$$\begin{cases} T_1 + \lambda(T_3 - 2T_2 + T_1) = S_1, \\ T_2 - 2\lambda(T_3 - 2T_2 + T_1) + \lambda(T_4 - 2T_3 + T_2) = S_2. \end{cases}$$

Sous forme matricielle, la première CPO donne

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -2\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

tandis que la deuxième CPO donne

$$\begin{bmatrix} -2\lambda & 1+5\lambda & -4\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Regroupant tous les résultats précédents, nous pouvons écrire l'ensemble des CPOs comme un système linéaire,

$$(\lambda \mathbf{F} + \mathbf{I}_\tau) \mathbf{T} = \mathbf{S},$$

où \mathbf{F} est une matrice de dimension $\tau \times \tau$, \mathbf{I}_τ est la matrice identité de dimension τ , \mathbf{T} est le vecteur que nous essayons de déterminer et \mathbf{S} est le vecteur des observations (ou des séries simulées). La matrice \mathbf{F} est une matrice de coefficients réels qui *ne* dépend *pas* des observations. Cette matrice se développe comme

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & & & & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Résoudre pour la tendance consiste donc à inverser la matrice $\lambda \mathbf{F} + \mathbf{I}_\tau$ et à obtenir

$$\mathbf{T} = (\lambda \mathbf{F} + \mathbf{I}_\tau)^{-1} \mathbf{S}.$$

Même pour un grand nombre d'observations, c'est une tâche très simple pour un ordinateur. Le fichier MATLAB est `hpfilter.m`.

23 Méthodologie pour les problèmes linéaires quadratiques (LQ)

Ces notes sont basées sur le chapitre 2 de "Computational Methods for the Study of Dynamic Economies", Marimon and Scott, eds.

Nous allons utiliser l'écriture matricielle pour décrire cette méthode et devons commencer par mettre la notation en place.

Soit le problème optimal générique suivant⁹²:

$$V(z, s) = \max_d \{r(z, s, d) + \beta E[V(z', s')|z]\},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} s' = A(z, s, d), \\ z' = L(z) + \varepsilon'. \end{cases}$$

⁹²Le chapitre 2 de Cooley décrit une méthode similaire (basée sur l'approximation quadratique) pour les problèmes optimaux et les problèmes d'équilibre. Le lecteur est référé au livre pour le second type de problèmes.

z : vecteur de variables d'état exogènes stochastiques ($\eta_z \times 1$).

s : vecteur de variables d'état endogènes ($\eta_s \times 1$).

d : vecteur de variables de décision ($\eta_d \times 1$).

ε : vecteur de variables aléatoires, d'espérance nulle et de matrice de variance/covariance finie.

r : fonction de "retour" (utilité).

V : fonction de valeur.

Pour un problème LQ, il faut que la fonction r soit quadratique et que les contraintes soient linéaires. Ainsi, les fonctions $A(\cdot)$ et $L(\cdot)$ doivent être linéaires.

Pour ce type de problèmes, nous savons que la fonction V est quadratique et les règles de décisions linéaires. Nous allons exploiter ces propriétés pour la résolution du problème. En particulier, l'application de l'opérateur usuel sur l'équation de Bellman va transformer une fonction quadratique en une autre fonction quadratique.

Au fur et à mesure de l'exposition, il peut être utile de se référer à un exemple simple. Pour cela, prenons le problème de Ramsey dans sa version stochastique:

$$V(z, k) = \max_{k', i} \{ \ln c + \beta E[V(z', k')|z] \},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} c + k' - (1 - \delta)k = e^z k^\alpha, \\ z' = \rho z + \varepsilon'. \end{cases}$$

En ne gardant que des contraintes linéaires, cela se réécrit comme

$$V(z, k) = \max_{k', c} \{ \ln(e^z k^\alpha - i) + \beta E[V(z', k')|z] \},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} k' = i + (1 - \delta)k, \\ z' = \rho z + \varepsilon'. \end{cases}$$

Nous avons donc choisi: $z \rightarrow z$, $s \rightarrow k$, $d \rightarrow i$, $r(z, s, d) \rightarrow \ln(e^z k^\alpha - i)$, $A(z, s, d) \rightarrow i + (1 - \delta)k$ et $L(z) \rightarrow \rho z$. De plus, $\eta_z = \eta_s = \eta_d = 1$.

Étape #1: *Calculer l'état stationnaire.*

Nous devons trouver l'état stationnaire $(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})$.

Dans le cas du problème de Ramsey, la valeur stationnaire du composant technologique est $\bar{z} = 0$ puisque $\rho < 1$. Étant donné cela, les valeurs stationnaires pour (s, d) peuvent être calculées. Nous avons déjà eu l'occasion de le faire (i.e. problème déterministique) et de trouver que $\bar{k} = (\alpha\beta/(1 - \beta(1 - \delta)))^{1/(1-\alpha)}$ et que $\bar{i} = \delta\bar{k}$.

Étape #2: *Construire l'approximation quadratique.*

Les fonctions d'utilité que nous utilisons (par exemple, les fonctions CRRA) ne sont pas quadratiques. Nous devons donc commencer par les approximer par des fonctions qui le sont. Nous utilisons un développement

de Taylor du second ordre et faisons cela dans le voisinage de l'état stationnaire $(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})$. *Un petit rappel des approximations par développement de Taylor est fourni en section 24.*

Commençons par définir le vecteur W de dimension $((\eta_z + \eta_s + \eta_d) \times 1)$,

$$W = \begin{bmatrix} z \\ s \\ d \end{bmatrix}.$$

Attention, il est important ici et pour le reste de l'exposition de bien respecter l'ordre dans lequel les éléments des vecteurs sont placés. Évalué à l'état stationnaire, ce vecteur est égal à \bar{W} .

Développons la fonction de retour:

$$r(z, s, d) \approx r(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) + (W - \bar{W})^T \bar{G} + \frac{1}{2} (W - \bar{W})^T \bar{H} (W - \bar{W}),$$

où \bar{G} est le gradient de la fonction évalué à l'état stationnaire (vecteur de dimension $(\eta_z + \eta_s + \eta_d) \times 1$) et \bar{H} le Hessien également évalué à l'état stationnaire (matrice de dimension $(\eta_z + \eta_s + \eta_d) \times (\eta_z + \eta_s + \eta_d)$). Ainsi, le gradient

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} r_z(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \\ r_s(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \\ r_d(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \end{bmatrix},$$

où il est implicite que r_z, r_s et r_d peuvent être constitués de plusieurs éléments, suivant le nombre de variables d'état exogènes et endogènes et suivant le nombre de variables de décision. De même le Hessien

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} r_{zz}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{zs}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{zd}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \\ r_{sz}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{ss}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{sd}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \\ r_{dz}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{ds}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) & r_{dd}(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}) \end{bmatrix}.$$

La même remarque s'applique pour le Hessien.

Ramsey: Continuant notre exemple et utilisant le fait que $r(z, s, d) = r(z, k, i) = \ln(e^z k^\alpha - i)$, nous trouvons que

$$\left\{ \begin{array}{l} r_z = \frac{e^z k^\alpha}{e^z k^\alpha - i}, \\ r_k = \frac{\alpha e^z k^{\alpha-1}}{e^z k^\alpha - i}, \\ r_i = \frac{-1}{e^z k^\alpha - i}, \\ r_{zz} = \frac{-e^z k^\alpha i}{(e^z k^\alpha - i)^2}, \\ r_{zk} = \frac{-\alpha e^z k^{\alpha-1} i}{(e^z k^\alpha - i)^2} = r_{kz}, \\ r_{zi} = \frac{e^z k^\alpha}{(e^z k^\alpha - i)^2} = r_{iz}, \\ r_{kk} = \frac{-\alpha e^z k^{\alpha-2} [e^z k^\alpha - (1-\alpha)i]}{(e^z k^\alpha - i)^2}, \\ r_{ki} = \frac{\alpha e^z k^{\alpha-1}}{(e^z k^\alpha - i)^2} = r_{ik}, \\ r_{ii} = \frac{-1}{(e^z k^\alpha - i)^2}. \end{array} \right.$$

Dénotons $\bar{R} = r(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})$. Développant l'approximation, nous obtenons

$$\begin{aligned} r(z, s, d) &= \bar{R} + (W - \bar{W})^T \bar{G} + \frac{1}{2} (W - \bar{W})^T \bar{H} (W - \bar{W}), \\ &= \bar{R} + W^T \bar{G} - \bar{W}^T \bar{G} + \frac{1}{2} W^T \bar{H} W - \frac{1}{2} W^T \bar{H} \bar{W} - \frac{1}{2} \bar{W}^T \bar{H} W + \frac{1}{2} \bar{W}^T \bar{H} \bar{W}. \end{aligned}$$

Comme chaque terme dans l'expression ci-dessus est un réel (et donc égal à sa transposée) et puisque le Hessien est une matrice symétrique, on peut regrouper le 5^{ème} et 6^{ème} terme et obtenir

$$r(z, s, d) = [\bar{R} - \bar{W}^T \bar{G} + \frac{1}{2} \bar{W}^T \bar{H} \bar{W}] + W^T (\bar{G} - \bar{H} \bar{W}) + \frac{1}{2} W^T \bar{H} W,$$

où le terme entre crochets regroupe les termes constants, c'est à dire indépendants de (z, s, d) . Nous introduisons les composants de la matrice Q de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s + \eta_d) \times (1 + \eta_z + \eta_s + \eta_d)$, qui va nous permettre de représenter l'approximation de la fonction de retour sous forme matricielle. Si⁹³

$$\begin{cases} Q_{11} = \bar{R} - \bar{W}^T \bar{G} + \frac{1}{2} \bar{W}^T \bar{H} \bar{W}, \\ Q_{12} = \frac{1}{2} (\bar{G} - \bar{H} \bar{W}), \\ Q_{22} = \frac{1}{2} \bar{H}, \end{cases}$$

alors $r(z, s, d) = Q_{11} + 2W^T Q_{12} + W^T Q_{22} W$ et

$$r(z, s, d) = [1 \ W^T] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix}.$$

(Vérifiez le en redéveloppant cette expression.) Donc, si l'on définit la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

alors

$$r(z, s, d) = [1 \ W^T] \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix}.$$

(Remarquez que tous les éléments de la matrice Q viennent du gradient et du Hessien de la fonction $r(z, s, d)$ évalués à l'état stationnaire).

Étape #3: Itération sur V .

Comme pour la méthode traditionnelle d'itération sur la fonction de valeur, nous allons "boucler" sur V , mais sans avoir à discrétiser l'espace des variables d'état, et sans avoir à maximiser une fonction objectif sur cette grille. Par contre, nous allons pleinement utiliser le fait que la fonction V est quadratique (ce qui reste vrai à chaque étape de l'itération) et que les règles de décision sont linéaires. Enfin, l'utilisation de l'écriture matricielle rendra le processus itératif très simple. Mais pour cela, nous devons commencer par réécrire le problème.

⁹³La matrice Q_{11} est de dimension 1×1 . La matrice Q_{12} est de dimension $(\eta_z + \eta_s + \eta_d) \times 1$. La matrice Q_{22} est de dimension $(\eta_z + \eta_s + \eta_d) \times (\eta_z + \eta_s + \eta_d)$.

Nous utilisons toujours le même opérateur sur l'équation de Bellman, ce qui à chaque itération est donné par

$$V_{n+1}(z, s) = TV_n(z, s) = \max_{d_n} \{ [1 \ W^T].Q. \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} + \beta E[V_n(z', s')|z] \},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} s' = A(z, s, d), \\ z' = L(z) + \varepsilon'. \end{cases}$$

Puisque la fonction V_n est quadratique, elle peut être représentée par une forme quadratique

$$V_n(z, s) = F^T P_n F,$$

où le vecteur F de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s) \times 1$ est défini par

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ s \end{bmatrix}.$$

La matrice P_n est de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s) \times (1 + \eta_z + \eta_s)$. Comme la fonction V_n est concave, la matrice P_n est négative semi-définie. Itérer sur la fonction $V_n(z, s)$ revient donc à itérer sur la matrice P_n .

Ainsi, nous pouvons écrire l'opérateur comme

$$V_{n+1}(z, s) = TV_n(z, s) = \max_{d_n} \{ [1 \ W^T].Q. \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} + \beta E[F'^T P_n F'|z] \},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} s' = A(z, s, d), \\ z' = L(z) + \varepsilon'. \end{cases}$$

Nous avons vu en section 10 que le Certainty Equivalence Principle implique que les règles de décision sont linéaires et qu'elles prennent les même expressions que dans le cas déterministique. Les règles de décision sont indépendantes des caractéristiques du processus stochastique. Pour résoudre pour les règles de décision, nous pouvons donc supprimer le terme d'expectation (en d'autres termes, supposer que la matrice de variance/covariance du processus aléatoire est 0 et remplacer le vecteur ε par son espérance, 0). Utilisant ce principe, nous pouvons réécrire l'opérateur sur lequel nous itérons comme

$$V_{n+1}(z, s) = TV_n(z, s) = \max_{d_n} \{ [1 \ W^T].Q. \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} + \beta F'^T P_n F' \},$$

$$t.q. \quad \begin{cases} s' = A(z, s, d), \\ z' = L(z). \end{cases}$$

Pour pouvoir trouver les conditions de premier ordre du problème de maximisation, on aimerait pouvoir mettre l'ensemble de l'expression ci-dessus sous une forme quadratique du type $[1 \ W^T]Z \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix}$.

Pour cela, il faut arriver à substituer les contraintes pour se débarrasser des variables d'état futures. Il faut trouver une matrice rectangulaire B de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s) \times (1 + \eta_z + \eta_s + \eta_d)$ telle que

$$F' = B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, le dernier terme de l'opérateur

$$F'^T P_n F' = [1 \ W^T] B^T P_n B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} V_{n+1}(z, s) &= \max_{d_n} \{ [1 \ W^T] \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} + \beta [1 \ W^T] B^T P_n B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} \}, \\ &= \max_{d_n} \{ [1 \ W^T] \cdot (Q + \beta B^T P_n B) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} \}. \end{aligned}$$

Quelle est cette matrice dans le problème de Ramsey? Ce doit être une matrice B de dimension 3×4 telle que $F' = B[1 \ W^T]^T$. On peut vérifier que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ z' \\ k' \end{bmatrix}}_{F'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \delta) & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ z \\ k \\ i \end{bmatrix}}_{[1 \ W^T]^T}.$$

Nous pouvons maintenant passer à la dérivation des conditions de premier ordre. Cela facilite les choses de passer par l'étape suivante... Écrivons $M_n = B^T P_n B$. Définie ainsi, M_n est une matrice carrée de dimension $1 + \eta_z + \eta_s + \eta_d$. Partitionnons Q et M_n de façon à séparer variables d'état et de contrôle, i.e.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{FF} & Q_{Fd}^T \\ Q_{Fd} & Q_{dd} \end{bmatrix},$$

et

$$M_n = \begin{bmatrix} M_{FF}^n & M_{Fd}^{(n)T} \\ M_{Fd}^n & M_{dd}^n \end{bmatrix}.$$

Les matrices Q_{FF} , M_{FF}^n , Q_{dd} et M_{dd}^n sont carrées et symétriques, les deux premières de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s) \times (1 + \eta_z + \eta_s)$ et les deux dernières de dimension $(\eta_d \times \eta_d)$.

Avec cette transformation, nous pouvons réécrire la fonction de valeur comme

$$V_{n+1}(z, s) = \max_{d_n} \{ [1 \ W^T] \cdot (Q + \beta M_n) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ W \end{bmatrix} \}.$$

Utilisant les définitions de F et de W , nous réécrivons la fonction de valeur comme

$$V_{n+1}(z, s) = \max_{d_n} \left\{ [F^T \ d_n^T] \cdot (Q + \beta M_n) \cdot \begin{bmatrix} F \\ d_n \end{bmatrix} \right\},$$

autrement dit

$$F^T P_{n+1} F = \max_{d_n} \left\{ [F^T \ d_n^T] \cdot (Q + \beta B^T P_n B) \cdot \begin{bmatrix} F \\ d_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Nous avons ainsi procédé de manière itérative afin de trouver le point fixe P^* de cette équation matricielle récursive.

Pour cela, nous cherchons maintenant les conditions de premier ordre:

$$V_{n+1}(z, s) = \max_{d_n} \left\{ [F^T \ d_n^T] \cdot \begin{bmatrix} Q_{FF} + \beta M_{FF}^n & Q_{Fd}^T + \beta M_{Fd}^{(n)T} \\ Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n & Q_{dd} + \beta M_{dd}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ d \end{bmatrix} \right\}.$$

En développant cette expression (*faites l'exercice*), on trouve

$$V_{n+1}(z, s) = \max_{d_n} \left\{ F^T (Q_{FF} + \beta M_{FF}^n) F + 2d_n^T (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) F + d_n^T (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n) d_n \right\}.$$

Les conditions de premier ordre sur d_n sont

$$(Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) F + (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n) d_n = 0.$$

(On a utilisé le fait que les matrices Q_{dd} et M_{dd}^n sont symétriques.) Inversant, on trouve que

$$d_n = -(Q_{dd} + \beta M_{dd}^n)^{-1} (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) F.$$

Pour alléger la notation, on réécrit la règle de décision $d_n = J_n^T F$. La matrice J_n est donc de dimension $(1 + \eta_z + \eta_s) \times \eta_d$.

Finalement, on peut remettre l'expression sortie de la CPO dans la fonction à maximiser:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(z, s) &= F^T (Q_{FF} + \beta M_{FF}^n) F + 2d_n^T (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) F + d_n^T (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n) d_n, \\ &= F^T (Q_{FF} + \beta M_{FF}^n) F + 2F^T J_n (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) F + F^T J_n (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n) J_n^T F, \\ &= F^T [Q_{FF} + \beta M_{FF}^n + 2J_n (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) + \underbrace{J_n (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n) J_n^T}_{=-(Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n)}] F. \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=J_n (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n)} \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} J_n (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n) &= -[(Q_{dd} + \beta M_{dd}^n)^{-1} (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n)]^T (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n), \\ &= -(Q_{Fd}^T + \beta M_{Fd}^{(n)T}) (Q_{dd} + \beta M_{dd}^n)^{-1} (Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n), \end{aligned}$$

utilisant le fait que les matrices Q_{dd} et M_{dd}^n sont symétriques.

Puisque par définition, $V_{n+1}(z, s) = F^T P_{n+1} F$, alors

$$P_{n+1} = Q_{FF} + \beta M_{FF}^n - (Q_{Fd}^T + \beta M_{Fd}^{(n)T})(Q_{dd} + \beta M_{dd}^n)^{-1}(Q_{Fd} + \beta M_{Fd}^n).$$

A ce point, nous sommes arrivés exactement là où nous voulions: à partir d'une matrice P_n qui définit $V_n(z, s) = F^T P_n F$, nous pouvons obtenir une matrice P_{n+1} qui définit la nouvelle itération de la fonction de valeur $V_{n+1}(z, s) = F^T P_{n+1} F$. Au lieu de converger sur la fonction V comme pour la méthode d'“itération sur la fonction de valeur”, nous itérons sur la matrice P , à partir de laquelle V est connue. Nous itérons à partir d'une conjecture initiale⁹⁴ P_0 , et continuons jusqu'à arriver à un point fixe P^* de cet opérateur. A chaque itération P_n correspond une règle de décision \hat{d}_n . Une fois la convergence assurée, nous obtenons donc la règle de décision optimale $d^*(z, s)$.

MATLAB program pour le problème de Ramsey: *voir site.*

24 Développement de Taylor

Soit une fonction infiniment différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La série de Taylor autour du point a est donnée par

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \dots$$

Théorème de Taylor:

Soit un point a dans un intervalle de \mathbb{R} . Soit une fonction n fois différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + A_n(x),$$

où

$$\frac{A_n(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow a.$$

Autrement dit, le développement jusqu'au degré n est une bonne approximation par rapport à $(x-a)^n$. Pour raffiner l'approximation, il faudrait faire un développement d'ordre supérieur. On écrit parfois que $A_n(x) = o((x-a)^n)$.

Si $a = 0$, alors le théorème devient que $f(x) - f(0) - xf'(0) - \frac{x^2}{2!}f''(0) - \dots - \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) = o(x^n)$.

Un développement similaire peut se faire dans le cas de fonctions réelles de plusieurs variables. Par exemple, si F est une fonction de deux variables, alors

$$F(x, y) \approx F(a, b) + (x-a)F_x(a, b) + (y-b)F_y(a, b) + \frac{1}{2}[(x-a)^2F_{xx}(a, b) + (y-b)^2F_{yy}(a, b) + 2(x-a)(y-b)F_{xy}(a, b)] + \dots$$

⁹⁴Le processus converge pour toute valeur initiale, mais un bon point de départ pour P_0 est une matrice remplie de zéros, sauf sur la diagonale remplie de petites valeurs négatives. Ainsi, la conjecture initiale est bien une matrice semi-définie négative.

D'une manière générale, soit F une fonction réelle d'un vecteur de variables \mathbf{X} de dimension $n \times 1$. Soit $DF(\mathbf{A})$ le gradient ($n \times 1$) de la fonction F autour du vecteur \mathbf{A} , i.e. $DF(\mathbf{A}) = [F_{x_1}(\mathbf{A}) \dots F_{x_n}(\mathbf{A})]^T$. Soit $D^2F(\mathbf{A})$ le Hessien ($n \times n$), i.e.

$$D^2F(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1}(\mathbf{A}) & \dots & F_{x_1x_n}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_nx_1}(\mathbf{A}) & \dots & F_{x_nx_n}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}.$$

Alors, le développement de Taylor (du second ordre) autour de \mathbf{A} est donné par

$$F(\mathbf{X}) = F(\mathbf{A}) + (\mathbf{X} - \mathbf{A})^T \cdot DF(\mathbf{A}) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{A})^T \cdot D^2F(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{A}).$$

25 Exemple Dynare

Nous reprenons l'exemple (stochastique) de la section 14.2, quand les variables sont à niveau:

```

close all;
clc;

% Déclaration des variables et des paramètres.
var y c k i h w r z;
varexo eps;
parameters beta A delta alpha rho sigmae;
    beta = 0.99;
    alpha = 0.36;
    A = 1.7214;
    delta = 0.025;
    rho = 0.95;
    sigmae = 0.007;

% Équations d'équilibre.
model;
    (1/c) = beta * (1/c(+1)) * (1+r(+1)-delta);
    A / (1-h) = (1/c) * w;
    c + i = y;
    i = k - (1-delta) * k(-1);
    w = (1-alpha) * y / h;
    r = alpha * y / k(-1);
    y = exp(z) * k(-1) ^ alpha * h ^ (1-alpha);
    z = rho * z(-1) + eps;

```

```

end;

% Calcul état stationnaire.
initval;
    k = 12.7;
    c = 0.9;
    h = 0.3;
    z = 0;
    eps = 0;
    y = 1.2;
    i = 0.3;
    w = 2.4;
    r = 0.04;
end;
steady;

% Introduction des chocs.
shocks;
    var eps = sigmae ^2;
end;

% Calculs.
stoch_simul (drop=100, hp_filter = 1600, irf = 100, order = 1, periods = 279, replic = 100, simul_replic=100);

```

Nous reprenons maintenant l'exemple de la section 14.2, quand les variables sont en logs:

```

close all;
clc;

% Déclaration des variables et des paramètres.
var yy cc kk ii hh ww rr z;
varexo eps;
parameters beta A delta alpha rho sigmae;
    beta = 0.99;
    alpha = 0.36;
    A = 1.7214;
    delta = 0.025;
    rho = 0.95;
    sigmae = 0.007;

% Équations d'équilibre.

```

```

model;
  (1/exp(cc)) = beta * (1/exp(cc(+1))) * (1+exp(rr(+1))-delta);
  A / (1-exp(hh)) = (1/exp(cc)) * exp(ww);
  exp(cc) + exp(ii) = exp(yy);
  exp(ii) = exp(kk) - (1-delta) * exp(kk(-1));
  exp(ww) = (1-alpha) * exp(yy) / exp(hh);
  exp(rr) = alpha * exp(yy) / exp(kk(-1));
  exp(yy) = exp(z) * exp(kk(-1))^alpha * exp(hh)^(1-alpha);
  z = rho * z(-1) + eps;
end;

% Calcul état stationnaire.
initval;
  kk = 2.5;
  cc = -0.1;
  hh = -1.1;
  z = 0;
  eps = 0;
  yy = 0.2;
  ii = -1.2;
  ww = 0.9;
  rr = -3.3;
end;
steady;

% Introduction des chocs.
shocks;
  var eps = sigmae ^2;
end;

% Calculs.
stoch_simul (drop=100, hp_filter = 1600, irf = 100, order = 1, periods = 279, replic = 100, simul_replic=100);

```

26 Taxation optimale avec “engagement” (“commitment”)

We are interested in looking at the problem a government faces in financing its own expenditures. We will treat it as a dynamic problem, where a government has to raise distortionary taxes, to finance a given exogenous stream of government expenditures.

26.1 Competitive equilibrium

Households:

The problem is deterministic. There is an infinitely lived representative household. Its preferences are given by a utility function $u(c_t, l_t)$, where c_t is consumption of the single good and l_t is leisure. The utility function has the usual properties. It is increasing and concave in c_t and l_t . The representative household discounts the future at rate β .

The household is endowed every period with one unit of time, so that:

$$h_t + l_t = 1,$$

so that the household has to divide its time between leisure and labor h_t .

Firms:

To produce output, firms use a technology characterized by a production function $f(h_t, k_t)$. They rent labor and capital from households, paying the capital rental rate r_t and wage rate w_t . The function f is assumed to be increasing in both arguments, concave and to exhibit constant returns to scale.

Aggregate resource constraint:

The output produced in period t can be consumed by households, used by the government or used to augment the capital stock, which otherwise depreciates at rate δ :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = f(h_t, k_t). \quad (28)$$

Notice that $\{g_t\}_{t=0..+\infty}$ is taken as given.

Government:

The government can raise flat-rate, *time-varying* taxes on capital (τ_t^k) and labor income (τ_t^h). It can also trade one-period bonds, which can accomplish any intertemporal trade in a deterministic economy. Denote by b_t the government indebtedness. b_t is denominated in time t goods and mature at the beginning of period t . Hence, the government budget constraint is given by:

$$g_t = \tau_t^k r_t k_t + \tau_t^h w_t h_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} - b_t, \quad (29)$$

where R_t is the gross rate of return of the one-period bonds held from t to $t+1$ (interest earnings are assumed to be tax-exempt).

Optimization:

The firm's problem is standard. Profit maximization implies that factor prices are equal to their marginal products:

$$\begin{aligned}w_t &= f_1(h_t, k_t), \\r_t &= f_2(h_t, k_t).\end{aligned}$$

The representative household maximizes the following objective function:

$$\begin{aligned}Max \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, 1 - h_t), \\s.t. c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} = (1 - \tau_t^h)w_t h_t + (1 - \tau_t^k)r_t k_t + b_t.\end{aligned}$$

We will use dynamic programming to solve the household's problem. The state variables are the capital stock k_t and the initial bond holdings b_t . The control variables are investment k_{t+1} , labor supply h_t , and the bond holdings to bring to the next period b_{t+1} . We can thus rewrite the household's problem as:

$$\begin{aligned}V(k_t, b_t) = Max_{k_{t+1}, h_t, b_{t+1}} \{u(c_t, 1 - h_t) + \beta V(k_{t+1}, b_{t+1})\}, \\s.t. c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} = (1 - \tau_t^h)w_t h_t + (1 - \tau_t^k)r_t k_t + b_t.\end{aligned}$$

The first order condition with respect to investment is:

$$u_1(c_t, 1 - h_t) = \beta V_1(k_{t+1}, b_{t+1}),$$

which, combined with the envelope condition on k_t ,

$$V_1(k_t, b_t) = [(1 - \tau_t^k)r_t + 1 - \delta] u_1(c_t, 1 - h_t)$$

results in:

$$u_1(c_t, 1 - h_t) = \beta u_1(c_{t+1}, 1 - h_{t+1}) [(1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1} + 1 - \delta]. \quad (30)$$

The first order condition with respect to labor supply is given by:

$$(1 - \tau_t^h)w_t u_1(c_t, 1 - h_t) = u_2(c_t, 1 - h_t). \quad (31)$$

Finally, the first order condition with respect to bond holdings is:

$$\frac{1}{R_t} u_1(c_t, 1 - h_t) = \beta V_2(k_{t+1}, b_{t+1}),$$

which combined with the envelope condition on b_t ,

$$V_2(k_t, b_t) = u_1(c_t, 1 - h_t)$$

gives us

$$\frac{1}{R_t} u_1(c_t, 1 - h_t) = \beta u_1(c_{t+1}, 1 - h_{t+1}). \quad (32)$$

Combining (30) and (32), we find that:

$$R_t = (1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta. \quad (33)$$

This condition, which does not involve any quantities that the household is free to adjust, constitutes an arbitrage condition. Since only one type of financial asset is needed to accomplish all intertemporal trades in a deterministic economy, (33) ensures that the two assets available (capital and bonds) offer the same rate of return⁹⁵.

Competitive equilibrium (for a given government policy):

A competitive equilibrium is an allocation $[\{c_t\}, \{k_t\}, \{h_t\}, \cdot \{g_t\}]_{t=0 \dots +\infty}$, a price system $[\{w_t\}, \{r_t\}, \{R_t\}]_{t=0 \dots +\infty}$ and a government policy $[\{g_t\}, \{\tau_t^k\}, \{\tau_t^h\}, \{b_t\}]_{t=0 \dots +\infty}$, such that:

- (a) Given prices and government policies, firms and households satisfy their respective optimization problems,
- (b) The aggregate resource constraint (28) is satisfied for all t ,
- (c) Given allocations and prices, government policies satisfy the government resource constraint (29), for all t .

Of course, the competitive allocation depends on the (exogenous) government policy. This motivates our interest in the following so-called "Ramsey problem". In the Ramsey problem, the government's goal is to maximize the representative household's welfare, subject to raising given revenues through distortionary taxation. The government knows how people react to a given set of taxes and can therefore use that "reaction function" to design optimal taxes.

⁹⁵If we write the household budget constraint for two consecutive periods, and eliminate b_{t+1} which appears in both, we get:

$$\begin{aligned} & c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} + \frac{k_{t+2}}{R_t} + \frac{b_{t+2}}{R_t R_{t+1}} \\ = & (1 - \tau_t^h) w_t h_t + \frac{(1 - \tau_{t+1}^h) w_{t+1} h_{t+1}}{R_t} + \left[\frac{(1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} + 1 - \delta}{R_t} - 1 \right] k_{t+1} + (1 - \tau_t^k) r_t k_t + (1 - \delta) k_t + b_t \end{aligned}$$

If the term multiplying k_{t+1} were not zero, the household could make its budget set unbounded by buying or selling an arbitrarily large k_{t+1} and entering the bond market (depending on the sign of the expression). Hence, to ensure the existence of a competitive equilibrium with bounded budget sets, the arbitrage condition must hold.

"Ramsey problem": Given k_0 and b_0 , choose a competitive equilibrium that maximizes the discounted lifetime utility of the representative household.

26.2 The Ramsey problem

The government tax revenues are $\tau_t^k r_t k_t + \tau_t^h w_t h_t$. Denote net after-tax capital and labor rental rates as $\tilde{r}_t = (1 - \tau_t^k) r_t$ and $\tilde{w}_t = (1 - \tau_t^h) w_t$, respectively. Hence, government tax revenues can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \text{tax revenues} &= (r_t - \tilde{r}_t) k_t + (w_t - \tilde{w}_t) h_t, \\ &= f(h_t, k_t) - \tilde{r}_t k_t - \tilde{w}_t h_t. \end{aligned}$$

Inserting this expression in the government budget constraint, we get:

$$g_t = f(h_t, k_t) - \tilde{r}_t k_t - \tilde{w}_t h_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} - b_t.$$

We thus incorporated the firm's first order conditions into the government budget constraint. The government policy choice is also restricted by the aggregate resource constraint and the household's problem first order conditions.

We know that the government is interested in designing a tax path $\{\tau_t^h, \tau_t^k\}$ to maximize consumers' welfare. It must first choose (once and for all) these taxes - and commit to them, then the competitive equilibrium determines how households react to these taxes, in each period. Thus, the firms' and the representative household's first order conditions, as well as the usual resource constraints, must be constraints in the government's problem. The difficulty is that the control variables in the household's problem are only implicitly defined through the first order conditions. We must therefore treat the problem as a Lagrangian one, where the government chooses taxes and the households' control variables (from section 26.1), with the restriction that the variables in the household's problem satisfy the first order conditions.

Hence, the government's problem can be written as:

$$\begin{array}{c} \text{Max} \\ \{\tau_t^h\}, \{\tau_t^k\} \\ \{k_{t+1}\}, \{h_t\}, \{b_{t+1}\}, \{c_t\} \end{array} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{l} u(c_t, 1 - h_t) \\ + \Phi_t \left[f(h_t, k_t) - \tilde{r}_t k_t - \tilde{w}_t h_t + \frac{b_{t+1}}{R_t} - b_t - g_t \right] \\ + \Theta_t \left[f(h_t, k_t) - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta) k_t - g_t \right] \\ + \mu_{1t} \left[u_2(c_t, 1 - h_t) - \tilde{w}_t u_1(c_t, 1 - h_t) \right] \\ + \mu_{2t} \left[u_1(c_t, 1 - h_t) - \beta u_1(c_{t+1}, 1 - h_{t+1}) [\tilde{r}_{t+1} + 1 - \delta] \right], \end{array} \right.$$

$$\text{where } R_t = \tilde{r}_{t+1} + 1 - \delta.$$

Since the point we want to make does not require fully solving for the government's problem, we only look at one of the optimizing condition, namely, the first-order condition with respect to k_{t+1} :

$$\beta \{ \Phi_{t+1} [f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) - \tilde{r}_{t+1}] + \Theta_{t+1} [f_2(h_{t+1}, k_{t+1}) + 1 - \delta] \} - \Theta_t = 0. \quad (34)$$

Suppose that the government expenditures remain constant after some period ($g_t = g, \forall t \geq T$) and that the solution to the Ramsey problem converges to a steady state. Then, from (34), we have that:

$$\beta \{ \Phi [r - \tilde{r}] + \Theta [r + 1 - \delta] \} = \Theta.$$

From (30), we have, in steady state:

$$1 = \beta [\tilde{r} + 1 - \delta],$$

which, plugged in the above equation, gives us:

$$(\Phi + \Theta) [r - \tilde{r}] = 0. \quad (35)$$

One can easily show that the multipliers on the aggregate and government resource constraints must be positive. Therefore, (35) implies that $r_t = \tilde{r}_t$, and thus we obtain the celebrated result that:

$$\tau_t^k = 0.$$

Hence, if the equilibrium has a steady state, then the optimal policy is to eventually set the tax rate on capital to zero! Of course, the same conclusion does not hold for the labor income tax. It is important to notice that this conclusion is robust to several changes. In particular, it holds whether the government can issue debt (as in the present model) or must run a balanced budget (in which case, one could follow the same proof and just set $b_t = b_{t+1} = 0$ in the Lagrangian problem). Also, notice that this strong result is not due to some efficiency considerations, as we did not consider lump-sum taxes. In fact, the only strong assumption of the model is that the government can commit to future tax rates, at time zero. Notice that taxing the (inelastically supplied) capital stock at date 0 amounts to lump-sum taxation and hence disposes of distortionary taxes. Thus, a government without a commitment technology may be tempted in future periods to renege on its premises and levy a confiscatory tax on capital. But, of course, households would anticipate that possibility and all the reasoning above would unravel. This leads us in the territory of time-inconsistent policies, and of reputation. Can an announced fiscal policy be sustained in an equilibrium because the government wants to preserve its reputation (rather than because one assumes that the government commits to the announced policy once and for all)?