Solutionnaire Intra 2019
ECO 9015

Question I :

1) Variable d'état individuelle : s

Variable d'état agrégée : z, $\underbrace{\mu}_{}$.

masse des firmes, selon s.

Contrôle : n.

μ dépend de (s, z).

2) Allocations: $n^d(s, z)$ (demande individuelle)

$M(z)$ (# entrants)

$C(z), N(z)$ (ménages)

Prix: salaire $w(z, \mu)$

Conditions: étant donné le salaire,

- ménages optimisant (max utilité),
- firmes optimisant (max profits escompté
- libre entrée,
- équilibrage des marchés.

3) Avec la libre entrée, toutes les opportunités de profit sont immédiatement réalisées chaque période, la distribution s'ajuste immédiatement aux conditions du marché (z). Il en est de même pour le salaire...

4) $V(s,z,\mu) = \max_{n \geq 0} \; sz\sqrt{n} - wn + \beta(1-\lambda)E[V(s',z') \mid s,z]$

$[n] \quad \frac{sz}{2\sqrt{n}} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad n^d(s,z) = \left(\frac{sz}{2w}\right)^2.$

[Aussi, $\pi(s,z) = \frac{s^2 z^2}{4w}$

5) $V: \; V_{i,j} = V(s_i, z_j) \qquad 2 \times 2 \; (N_s \times N_z)$

$V(s_i,z_j) = \max_n \; \pi(s_i,z_j) + \beta(1-\lambda)\, E\left[V(s',z') \mid s_i, z_j \right]$

Il faut donc calculer $E[V(s',z') \mid s_i, z_j]$, $\forall i,j$,

$\rightarrow$ matrice $\begin{bmatrix} E_{s_1,z_1}[V(s',z')] & E_{s_1,z_2}[V(s',z')] \\ E_{s_2,z_1}[V(s',z')] & E_{s_2,z_2}[V(s',z')] \end{bmatrix}$

où $$E_{s_i,z_j}[V(s',z')] = P_{s_i z_j \to s_1 z_1} V(s_1,z_1) + P_{s_i z_j \to s_1 z_2} V(s_1,z_2)$$

$$(*) \qquad + P_{s_i z_j \to s_2 z_1} V(s_2,z_1) + P_{s_i z_j \to s_2 z_2} V(s_2,z_2)$$

Réponse complète :

- Inspiré par $(*)$,

définir $P : 4 \times 4$, où $P = \begin{bmatrix} P_{s_1 z_1 \to s_1 z_1} & P_{s_1 z_1 \to s_1 z_2} & P_{s_1 z_1 \to s_2 z_1} & P_{s_1 z_1 \to s_2 z_2} \\ P_{s_1 z_2 \to X} & P_{s_1 z_2 \to X} & P_{s_1 z_2 \to X} & P_{s_1 z_2 \to X} \\ P_{s_2 z_1 \to X} & P_{s_2 z_1 \to X} & P_{s_2 z_1 \to X} & P_{s_2 z_1 \to X} \\ P_{s_2 z_2 \to X} & P_{s_2 z_2 \to X} & P_{s_2 z_2 \to X} & P_{s_2 z_2 \to X} \end{bmatrix}$

Définir $V : 4 \times 1$, où $V = \begin{bmatrix} V(s_1,z_1) \\ V(s_1,z_2) \\ V(s_2,z_1) \\ V(s_2,z_2) \end{bmatrix}$ et $\pi = \begin{bmatrix} \pi(s_1,z_1) \\ \pi(s_1,z_2) \\ \pi(s_2,z_1) \\ \pi(s_2,z_2) \end{bmatrix}$

$\pi : 4 \times 1$

alors $\quad V = \Pi + \beta(1-\lambda)\, P V \quad (**)$

$$\begin{cases} \Omega = I_4 - \beta(1-\lambda) P \\ b = \Pi \end{cases}$$

<u>Réponse acceptée</u> $(**)$ sans avoir détaillé P.

6) V dépend de z $\longrightarrow$ V_e dépend aussi de z.

$\Longrightarrow$ La condition de libre entrée doit être exprimée en fonction de z.

$$\begin{cases} A\ t\text{-}1, \quad c_e = V_e(z_{-1}) \\ \quad \text{où } V_e(z_{-1}) = \beta(1-\lambda) \sum_k Z_{z_{-1} \to k}\, V(s_2, z_k) \end{cases}$$

Autrement dit : $\forall j,\ V_e(z_j) = \beta(1-\lambda) \sum_k z_{j \to k}\, V(s_2, z_k)$

$\longrightarrow$ détermine un système en $\{ W(z_k) \}$

7) Partant d'une distribution initiale → on simule des tirages de z, et on applique les règles de décision (autrement dit, on sait comment μ réagit avec z (voir réponse à 3).

8) $$\max_{x_z, N_z} \ \ln x_z - A N_z \qquad \text{(pour tout } z\text{)}$$

$$\text{t.q.} \quad x_z = w_z N_z + \Pi_z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_z} = \frac{A}{w_z}$$

Equilibrage des marchés : $x_z + M_z c_e = X_z$.

Question II

1a) $\begin{cases} \text{Ménage : } V(k) = \max\limits_{k', c} \; \ln c + \beta V(k') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{t.q. } c + k' = rk + \Pi \\ \\ \text{Firmes : } \max\limits_{k} \; k^{\alpha} - rk \\ \\ \text{Equilibrage : } k^{d} = k^{o} \end{cases}$

Ménage :

$[k'] \qquad -\frac{1}{c} + \beta V'(k') = 0$

$V'(k) = \frac{1}{c} r$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{c} = \beta \frac{r'}{c'} \longrightarrow \beta \frac{c}{c'} r' = 1$

Firme

$\alpha k^{\alpha - 1} = r$

. On vérifie $\quad rk + \Pi = k^{\alpha} \quad \longrightarrow \begin{cases} c + k' = k^{\alpha} \\ \beta \frac{c}{c'} r' = 1 \end{cases}$

1b) Planificateur social :

$$V(k) = \max_{k', c} \; \ln c + \beta V(k')$$

$$\text{t.q.} \quad c + k' = k^\alpha$$

$$\left.\begin{array}{ll} [k'] & -\dfrac{1}{c} + \beta V'(k') = 0 \\[2ex] & V'(k) = \dfrac{1}{c}\, \alpha k^{\alpha-1} \end{array}\right\} \longrightarrow \beta \frac{c}{c'} \alpha (k')^{\alpha-1} = 1$$

On voit immédiatement que Op. = Eq.

2) Optimal + stationnaire $\longrightarrow \begin{cases} c^* + k^* = (k^*)^\alpha \\ \beta\alpha\, (k^*)^{\alpha-1} = 1 \end{cases}$

A partir de là, avec $y^* = (k^*)^\alpha$: $\begin{cases} c^* + k^* = y^* \\ \alpha\beta \dfrac{y^*}{k^*} = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^* = \alpha\beta y^* \\ c^* = (1-\alpha\beta) y^* \\ y^* = (\alpha\beta)^{\alpha/1-\alpha} \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} \hat{c}_t = \ln \dfrac{c_t}{c^*} \\ \hat{k}_t = \ln \dfrac{k_t}{k^*} \end{cases}$

CRA : $c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha$

$\Longrightarrow c^* e^{\hat{c}_t} + k^* e^{\hat{k}_{t+1}} = \left[k^* e^{\hat{k}_t}\right]^\alpha$ ... $\Longrightarrow$ ~~$c^*(e^{\hat{c}_t}) + k^* e^{\hat{k}_{t+1}} \approx \alpha y^* \hat{k}_t$~~ $\Longrightarrow \boxed{(1-\alpha\beta)\,\hat{c}_t + \alpha\beta\,\hat{k}_{t+1} \approx \alpha\,\hat{k}_t}$

$\Longrightarrow (1-\alpha\beta) e^{\hat{c}_t} + \alpha\beta e^{\hat{k}_{t+1}} = e^{\alpha\hat{k}_t}$

CPO : $\beta \dfrac{c_t}{c_{t+1}} \alpha (k_{t+1})^{\alpha-1} = 1$

$\ldots \Longrightarrow \boxed{\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} = (1-\alpha)\,\hat{k}_t}$

- Postulant des règles de décision linéaires :

$$\hat{k}_{t+1} = \mu_k\,\hat{k}_t \quad \text{et} \quad \hat{c}_t = \mu_c\,\hat{k}_t$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (1-\alpha\beta)\,\mu_c + \alpha\beta\,\mu_k = \alpha \\ \mu_c\,(1-\mu_k) = 1-\alpha \end{cases}$$

Réponse acceptée. Supposons $\begin{cases}\beta = 1 \\ \alpha = \frac{1}{2}\end{cases}$ (pour simplifier)

$$\begin{cases} \mu_c + \mu_k = 1 \\ 2\,\mu_c\,(1-\mu_k) = 1 \end{cases}$$

Donc $2\gamma_c^2 = 1 \longrightarrow \gamma_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(puisque $c'(k) > 0$)

et ainsi $\gamma_k = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

—//—

Règle $\longrightarrow \hat{c}_{t+1} = \gamma_c \hat{k}_{t+1} = \gamma_c \gamma_k \hat{k}_t = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \hat{k}_t$

Choc $\longrightarrow \hat{k}_t = -\frac{1}{100}$, donc $\hat{c}_{t+1} = \frac{1-\sqrt{2}}{200}$

et $c_{t+1} = c^* e^{\frac{1-\sqrt{2}}{200}} < c^*$

—//—

Question III :

Info donnée : $z_t \in \{z_1, z_2\} \rightarrow$ état exogène (P_z connu)

$k_t \rightarrow$ état endogène $(\delta = 1)$

technologie : $y_t = z_t f(k_t, e_t)$

$p_{b,t} \rightarrow$ état exogène (distribution connue)

1) Si e_t : input d'engrais

$u = \ln c$

États : → exogènes z, P_b.
→ endogène k.

Contrôle k', e.

$$V(k, z, P_b) = \max_{k', e} \ln c + \beta E[V(k', z', P_b') | z]$$

$$\text{t.q.} \quad \overline{P_c}\, c + \overline{P_k}\, k' + \overline{P_e}\, e = P_b z f(k, e)$$

$$\begin{cases} [k'] & -\dfrac{\overline{P_k}}{\overline{P_c}} \dfrac{1}{c} + \beta E[V_1(k', z', P_b') | z] = 0 \\ \boxed{\times} & V_1(k, z, P_b) = \dfrac{1}{c} \dfrac{P_b}{\overline{P_c}} z f_1(k, e) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\overline{P_k}}{\overline{P_c}} \frac{1}{c} = \beta E\left[\frac{1}{c'} \frac{P_b'}{\overline{P_c}} z' f_1(k', e')\right]$$

$$\longrightarrow \quad E\left[\beta \frac{c}{c'} \frac{P_b'}{\overline{P_k}} z' f_1(k', e')\right] = 1$$

Eq. d'Euler intertemporelle habituelle, tenant en compte les variations du prix relatif entre production et capital

$[e]$ $\quad \frac{1}{c}\left[\frac{p_b z f_2(k,e) - \bar{p}_e}{\bar{p}_e}\right] = 0$

$$\rightarrow \underbrace{p_b\, z\, f_2(k,e)}_{GM_{\text{effort}}} = \underbrace{\bar{p}_e}_{CM_{\text{effort}}}$$

2) Si e_t : effort

$u = \mathrm{Ln}\, c - e$

Mêmes variables d'état et de contrôle.

$$V(k, z, p_b) = \max_{k', e} \; \mathrm{Ln}\, c - e + E\left[V(k', z', p_b') \mid z\right]$$

$$\text{s.q.} \quad \bar{p}_c\, c + \bar{p}_k\, k' = p_b\, z\, f(k,e)$$

Condition sur k $\rightarrow$ même.

$$[e] \quad \underbrace{\frac{1}{c}}_{\substack{\text{Utilité}\\ \text{marginale}\\ \text{consommation}}}\; \underbrace{\frac{p_b}{\bar{p}_c}\, z\, f_2(k,e)}_{\substack{\text{rendement}\\ \text{marginal}\\ \text{de l'effort}}} = \underbrace{1}_{CM_{\text{effort}}}$$