Intra Automne 2020

Solutionnaire

Exercice I

(1) Un équilibre est composé :

- d'allocations : $\begin{cases} n_x^d(s), & n_y^d(s) \\ M_x, & M_y \\ x, y, N & \end{cases}$ demandes individuelles / entrants / ménage

- de prix : prix de X et Y
  salaires payés en X et Y

tels que : étant donné les prix,

- ménage maximise son utilité,
- firmes maximisent leur EB,
- libre entrée
- équilibrage des marchés.

(2) Variable d'état individuelle : s (firme)

(Variable d'état agrégée : Distribution μ des tailles de firmes)

Variable de contrôle : n

(3) Les travailleurs étant homogènes, ils n'offriraient pas de travail dans un secteur qui paierait moins.

$$\Rightarrow \boxed{w_x = w_y = w}$$

(4) Industrie $\sigma = X$ ou Y.

$$V_\sigma(s) = \max_n \; p_\sigma s n^\theta - wn + \beta(1-\lambda)\, E[V_\sigma(s')|s]$$

Par inspection, on voit que le problème est en fait statique.

$$[n_\sigma] \qquad p_\sigma \theta s n_\sigma^{\theta-1} = w \Longrightarrow \boxed{n_\sigma(s) = \left[\frac{s\theta}{\omega_\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

(notation : salaire réel $\frac{w}{p_\sigma} = \omega_\sigma$)

- La production individuelle est

$$\boxed{y_\sigma(s) = s\, n_\sigma(s)^\theta = \dots = \left[\frac{s\,\theta^\theta}{\omega_\sigma^\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}},$$

- La fonction de production ayant des rendements décroissants, le profit restant est une proportion $(1-\theta)$ du revenu.

$$\Rightarrow \boxed{\pi_\sigma(s) = (1-\theta)\,p_\sigma\left[\frac{s\,\theta^\theta}{\omega}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

(5) Après discrétisation, $\sigma = X$ ou Y.

$$\forall i, \quad V_\sigma(s_i) = \pi_\sigma(s_i) + \beta(1-\lambda)\sum_j Q_{ij}\, V_\sigma(s_j)$$

où $Q_{ij} = \text{Prob}\,(s = s_i \rightarrow s' = s_j)$.

(6) Pour $\sigma = X$ ou Y, la valeur nette d'entrée

$$VNE_\sigma = -p_\sigma\, c_{e\sigma} + \beta\sum_i \nu_i\, V_\sigma(s_i).$$

La libre entrée des firmes implique que $VNE_\sigma = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{p_\sigma\, c_{e,\sigma} = \beta(1-\lambda)\sum_i \nu_i\, V_\sigma(s_i)}$$

7) Pour $\sigma = X$ ou Y,

Flux rentrants dans chaque niveau de taille de firmes = Flux en sortant

$$\underline{\forall i} \quad \mu_\sigma(s_i) = (1-\lambda)\left[\sum_j Q_{ji}\, \mu_\sigma(s_j) + M_\sigma \nu_i\right]$$

On résoud pour $M_\sigma = 1 \longrightarrow \hat{\mu}_\sigma(s)$

On utilise $\mu_\sigma(s) = M_\sigma \hat{\mu}_\sigma(s)$

Mêmes processus stochastiques $\Rightarrow$ même $\hat{\mu}_\sigma(s)$

[bien que pas forcément les mêmes $\mu_\sigma(s)$]

8) Le ménage $\max\limits_{x, y, N} \; \Phi \ln x + (1-\Phi) \ln y - AN$

$$\text{t.q. } p_x x + p_y y = wN + \Pi_x + \Pi_y$$

[Π_x / M_x et Π_y / M_y calculables.]

$[x]$ $\quad \dfrac{\Phi}{x} = \dfrac{A}{\omega_x}$ $\quad$ (ω_x calculable avec LE_X)

$[y]$ $\quad \dfrac{1-\Phi}{y} = \dfrac{A}{\omega_y}$ $\quad$ (ω_y calculable avec LE_Y)

→ D'où (x, y).

Equilibrage bien X : $\quad x + M_x c_{ex} = M_x (X/M_x)$

Equilibrage bien Y : $\quad y + M_y c_{ey} = M_y (Y/M_y)$

CPO $[x]$ $\longrightarrow x$ $\qquad$ Marché X → M_x

CPO $[y]$ $\longrightarrow y$ $\qquad$ Marché Y → M_y

$$(CB) \longrightarrow p_x x + p_y y = p_x X + p_y Y = p_x M_x (X/M_x) + p_y M_y (Y/M_y)$$

Normalisant un des prix (p_x, p_y) à 1 → on obtient l'autre prix.

Connaissant les salaires réels, on obtient w.

(9) Si $c_{e\sigma} \uparrow$,

$\Rightarrow c\omega_\sigma \downarrow$ (d'après LE) $\Rightarrow \dfrac{w}{p_\sigma} \downarrow$ (salaire unique)

$\Rightarrow p_\sigma \uparrow$.

* Si plus coûteux de rentrer dans l'industrie, compensé par prix plus élevé.

(tout le reste étant similaire.)

Exercice II

1) Dans le secteur "équipement", la firme $\max_{k_t} p_{kt}(A k_t) - r_t p_{kt} k_t$

$$[k_t] \qquad r_t = A$$

2) Dans le secteur "consommation", la firme $\max_{k_t, h_t} p_{ct} h_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha} - w_t h_t - r_t p_{kt} k_t$

$$[h_t] \qquad (1-\alpha) p_{ct} \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha} = w_t$$

$$[k_t] \qquad \alpha \; p_{ct} \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1} = r_t p_{kt}$$

3) La loi de transition du capital agrégé est:

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t,$$

$$= A(1-\phi_t) K_t.$$

- Divisant par K_t, $\boxed{g_K = 1-\delta + A(1-\bar{\Phi})}$.

- Comme $C_t = H_t^{1-\alpha}(\Phi_t K_t)^\alpha = \bar{H}^{1-\alpha}(\bar{\Phi} K_t)^\alpha$,

alors $\dfrac{C_{t+1}}{C_t} = g_C = \left(\dfrac{K_{t+1}}{K_t}\right)^\alpha = g_K^\alpha$

$$\boxed{g_C = g_K^\alpha}$$

- Soit $P_t = \dfrac{P_{kt}}{P_{ct}}$. Combinant les deux CPOs

du capital, $P_t = \dfrac{\alpha}{A}\left(\dfrac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1}$

$$\longrightarrow \boxed{g_P = g_K^{\alpha-1}}$$

4) Etat : k_t (K_t)

Contrôle : c_t, k_{t+1}, h_t.

Budget: $w_t h_t + r_t P_{kt} k_t = P_{ct} c_t + P_{kt}\left[k_{t+1} - (1-\delta)k_t\right]$

. Remarque : Etant donné la fonction d'utilité, $h_t = 1$, $\forall t$.

$$\cdot\ V(k_t) = \max_{k_{t+1}, c_t} u(c_t) + \beta V(k_{t+1})$$

t.q. CB

$$\left.\begin{array}{ll} [k_{t+1}] & -p_t u'(c_t) + \beta V'(k_{t+1}) = 0 \\ (TE) & V'(k_t) = u'(c_t)\, p_t (r_t + 1 - \delta) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad p_t u'(c_t) = \beta p_{t+1} u'(c_{t+1})(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

Avec la fonction d'utilité donnée,

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma} = \beta \frac{p_{t+1}}{p_t} (r_{t+1} + 1 - \delta).$$

5) Le résultat ci-dessus (et la CPO : $r_t = A$)

nous donne :

$$(g_c)^{\sigma} = \beta g_p (1 + A - \delta)$$

. En utilisant la question 3), nous simplifions : $g_K^{\alpha\sigma} = \beta\, g_K^{\alpha-1}(1+A-\delta)$

$$\Rightarrow g_K = \left[\beta(1+A-\delta)\right]^{\frac{1}{1-(1-\sigma)\alpha}}.$$

- Nous avions trouvé ci-dessus que : $g_K = 1-\delta + A(1-\bar{\Phi})$,

d'où l'on obtient $\bar{\Phi}$.

6) Si $\sigma = 1$, $g_K = \beta(1+A-\delta) > 1$,

donc que la technologie de production d'équipement soit caractérisée par

$$A > \frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta}$$

Exercice III Voir cours.

(6 i) CL $= \overline{\tau}$ fixe

EB $\Rightarrow V(s, n_{-1}) = \max_{n} \; psf(n) - wn - \tau + \beta(1-\lambda) E[V(s', n) | s]$

$[n]$ $psf'(n) = w$ (sans licenciement)

mais $\begin{cases} \text{profit} = psf(n) - wn \quad (\text{si } n \leq n_{-1}) \\ \text{et profit} = psf(n) - wn - \tau \quad \text{si } n > n_{-1} \end{cases}$

→ la décision dépend de n_{-1}.

→ dynamique

(6 ii) Le coût dépend de $n - n_{-1}$

→ décision dépend de n_{-1}

→ dynamique